Analyse des circuits en régime transitoire (ordres 1 et 2)

« Dans tout ce que la nature opère, elle ne fait rien brusquement. »
Jean-Baptiste de Monet, Chevalier de Lamarck.

Résumé

Le traitement des signaux électriques s'opère souvent au travers de réseaux linéaires. Les grandeurs électriques d'excitation (tensions ou courants) sont transformées pour constituer le résultat qui est observé au travers des grandeurs de sortie.

La mise en équation du système conduit à un ensemble de relations différentielles liant les entrées et les sorties. La résolution de ces équations permet de fournir l'expression des grandeurs au cours du temps.

L'étude ayant trait à des circuits linéaires, les cas abordés aboutiront à des équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du deuxième ordre. Bien que les études portent sur des systèmes à une seule entrée et une seule sortie, une adaptation permettra toujours de traiter les cas où coexistent plusieurs entrées ou plusieurs sorties.

L'exemple de circuit du premier ordre retenu est le circuit RC en réponse à des signaux souvent rencontrés dans les exploitations technologiques : échelon de tension, rampe de tension et excitation sinusoïdale. Pour le deuxième ordre, le circuit RLC (équivalence des machines électrique par exemple) illustre l'étude de la résolution dans le seul cas de l'échelon de tension.

Sommaire

I. Positionnement de l'étude

L'introduction aux réseaux linéaires montre qu'une fois définis les éléments du réseau et établie sa topologie, la mise en équation débouche sur la phase de résolution. Celle-ci passe parfois par la résolution d'une ou de plusieurs équations différentielles.

C'est à cela que nous intéressons maintenant : l'étude de l'évolution temporelle des grandeurs après l'établissement ou la disparition des sources. Fruits de résultats mathématiques, les solutions physiques obtenues superposent **deux réponses** : le **régime libre** obtenu par la solution générale de l'équation sans second membre et le **régime forcé** issu d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

II. Exemples introductifs

Menons l'étude du courant *i(t)* pour les réseaux de la Figure 1 et de la Figure 2 où le signal *u(t)* est un échelon de tension d'amplitude *E*, c'est à dire une tension nulle avant $t = 0$ et valant *E* ensuite.

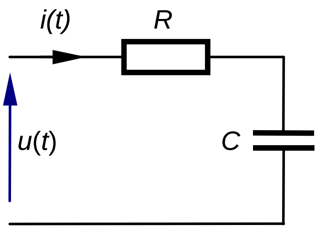


Figure 1

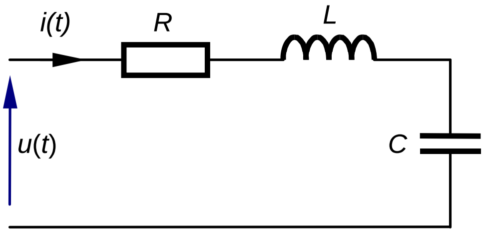


Figure 2

La mise en équation conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} i(t) = \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt}$$

Après $t = 0$, $u(t) = E$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} i(t) = 0$$

La mise en équation conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Après $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

L'observation de ces résultats fait apparaître que le premier cas conduit à une équation différentielle du premier ordre, tandis que dans l'autre cas, on obtient une équation différentielle du deuxième ordre.

Les études qui suivent concernent ces deux types de réseaux. Si la mise en équation conduit à une **équation différentielle du premier ordre**, on dit que l'on a affaire à un **circuit du premier ordre** (un tel circuit possède souvent un seul élément réactif). Si **l'équation** est du **second ordre**, le circuit porte le même nom (il y a souvent deux éléments réactifs). Bien que rare, on peut effectuer une analyse de ce type pour des circuits d'ordre supérieur.

Cette introduction s'appuie sur un exemple électrique pour obtenir les équations différentielles, mais leur résolution s'adapte aisément un quelconque domaine de la physique. En conséquence, dans la suite de l'exposé, nous considérerons que le signal de sortie (exprimé en fonction du temps) est noté *s(t)*, tandis que le signal d'entrée est noté *e(t)*.

III. Étude des circuits du premier ordre

III.1. Forme générale de l'équation différentielle

Un circuit du premier ordre est régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\boxed{\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = K_0 \cdot e(t)}$$

Dans cette équation où e(t) est la grandeur d'entrée, on rencontre les paramètres suivants :

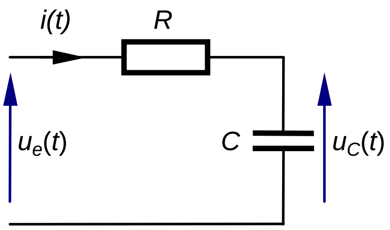
- τ est la constante de temps du circuit, homogène à un temps ;
- K_0 est le l'amplification statique du montage (dans le rapport des unités de s et e).

Remarque :

Le coefficient K_0 est facilement issu d'une analyse **sans variation**, c'est à dire **statique** des grandeurs : c'est le rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$ lorsque tous les termes dérivés sont nuls.

III.2. Résolution basée sur le circuit *RC* en réponse à un créneau de tension

Analysons le comportement du circuit *RC* de la Figure 3 lorsque l'on applique un échelon de tension d'amplitude *E*.



auquel on applique

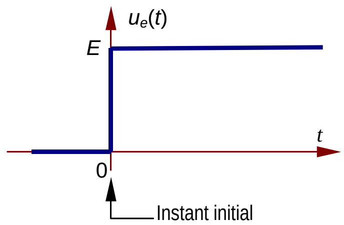


Figure 3 : circuit RC.

La loi sur la maille donne :

$$R \cdot i(t) + u_C(t) = u_e(t)$$

ce qui fournit :

$$RC \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u_e(t)$$

On identifie les coefficients suivants :

$$\tau = RC \ ; \ K_0 = 1 \text{ (pas d'amplification)}$$

III.2.1. A la mise sous tension (charge)

La réponse est la superposition de deux composantes :

- L'une issue de la réaction du circuit à la modification de l'entrée, c'est le régime libre ;
- L'autre issue de l'entrée qui finit par s'imposer, c'est le régime forcé.

La **composante libre** est obtenue en déterminant la solution générale de l'équation sans second membre, abrégée SGESSM. Pour ce type d'équation, c'est une fonction exponentielle. On la note $u_1(t)$. La **composante forcée** est une solution particulière de l'équation avec second membre (abrégée SPEASM) qui répond à l'équation. On la recherche le plus souvent du type du second membre. Ici c'est une constante, la solution particulière sera recherchée sous cette forme.

Composante libre : Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM)

Cette solution, notée $u_1(t)$, correspond à un second membre nul : $\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u_1(t)=0$

La solution est de type exponentiel : $u_1(t)=K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ où K est une constante réelle homogène à une tension qui montre la multiplicité des solutions possibles à ce stade de la résolution.

Remarque :

Abusivement, on peut retrouver cette forme exponentielle en écrivant :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}}{u_1(t)}=-\frac{1}{\tau} \text{ (si } u_1 \text{ est non nulle)}$$

Il s'agit de la dérivée de la fonction logarithme :

$$\frac{\mathrm{d}\ln u_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\tau}$$

Ce qui conduit par intégration à $u_1(t)=K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

En fait cette démonstration n'est pas rigoureuse car on ne sait pas a priori si la solution recherchée est non nulle. Elle constitue cependant un moyen pour « retrouver » le résultat.

Composante forcée : Solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM)

Ici, la solution notée $u_2(t)$ est recherchée sous la forme d'une constante $U_{C\infty}$. La notation ∞ en indice fait référence au régime permanent, c'est-à-dire pour une durée infinie :

$\frac{\mathrm{d}U_{C\infty}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}U_{C\infty}=\frac{E}{\tau}$ puisque $t\to\infty$ (tension E établie)

On a alors $U_{C\infty}=E$: la composante forcée est $u_2(t)=E$.

Réponse complète : superposition des composantes libre et forcée

$$u_C(t)=u_1(t)+u_2(t)=K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+E$$

La dernière étape : rechercher la constante K

Parmi toutes les solutions mathématiquement acceptables données par le résultat précédent, il faut isoler celle qui correspond à notre problème.

Pour caractériser cette solution, on écrit celle qui coïncide avec une valeur particulière appelée **condition initiale**. Cette dernière est trouvée en analysant la valeur de u_C à l'instant où l'on applique l'échelon de tension. Ici, on considère qu'à $t=0^+$ (c'est-à-dire un peu après 0), la tension $u_C(0^+)=U_{C0}$.

On a donc :

$$u_C(0^+)=U_{C0}=K\cdot e^{-\frac{0}{\tau}}+E=K+E \text{, soit } K=U_{C0}-E.$$

En résumé, la solution représentant la tension aux bornes du condensateur lorsque l'on applique un échelon de tension d'amplitude E est :

$$\boxed{u_C(t)=(U_{CO}-E)e^{-\frac{t}{\tau}}+E \text{ pour } t\geq 0.}$$

Généralisation

- Si l'échelon apparaît à l'instant $t = t_0$, il faut réaliser une translation temporelle, c'est à dire effectuer le changement de variable t en $t - t_0$.
- Dans une telle configuration, si U_{init} est la valeur initiale de u_C et U_{finale} la valeur en régime établi, $u_C(t)$ s'exprime de manière générale par :

$$\boxed{u_C(t) = (U_{init} - U_{finale})e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{finale} \text{ pour } t \geq 0.}$$

III.2.2. A la rupture de la source (décharge)

A la rupture de la source, le générateur n'apparaît plus dans la mise en équation : $u_e(t) = 0$.

Le second membre est donc nul, il en va alors de même pour le régime permanent : $u_2(t) = 0$.

La solution est donc (SGESSM)+(0) :

$$u_C(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } K \text{ réelle, homogène à une tension.}$$

Pour rechercher la constante K, il faut connaître la condition initiale du circuit. Cette fois le condensateur était totalement chargé, donc $U_{C0} = E$ à $t = 0$. Ceci conduit à $K = E$.

En résumé, la solution représentant la tension aux bornes du condensateur après la rupture de la source est :

$$\boxed{u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t \geq 0.}$$

Remarque

Le second point du §III.2.1 s'applique ici parfaitement, car en régime permanent la tension $U_{C\infty} = U_{finale}$ est nulle et $U_{C0} = E$.

III.2.3. Implications pratiques… et technologiques

Pour des conditions initiales nulles, la tension aux bornes du condensateur durant les deux phases précédentes est représentée à la *Figure 4* avec pour constante de temps $\tau = RC$, homogène à un temps. C'est par rapport à cette valeur que l'on peut normaliser l'étendue temporelle de la charge et de la décharge d'un condensateur. A ce titre, à l'instant $t = \tau$, le condensateur est chargé à 63% de sa valeur finale E tandis qu'à la décharge, il ne reste que 37% de la tension initiale. On peut donc dire qu'au delà de $t = 5\tau$, le condensateur est totalement chargé (ou déchargé).

Une particularité de construction est à retenir : la tangente à l'origine coupe l'asymptote à la courbe en $t = \tau$, tandis que la tangente en ce point coupe l'asymptote en 2τ.

Enfin, l'allure de la tension aux bornes du condensateur traduit un retard à l'établissement de l'échelon. C'est en effet, la **première propriété d'un circuit du premier ordre** est de **retarder** l'établissement ou la disparition d'une grandeur.

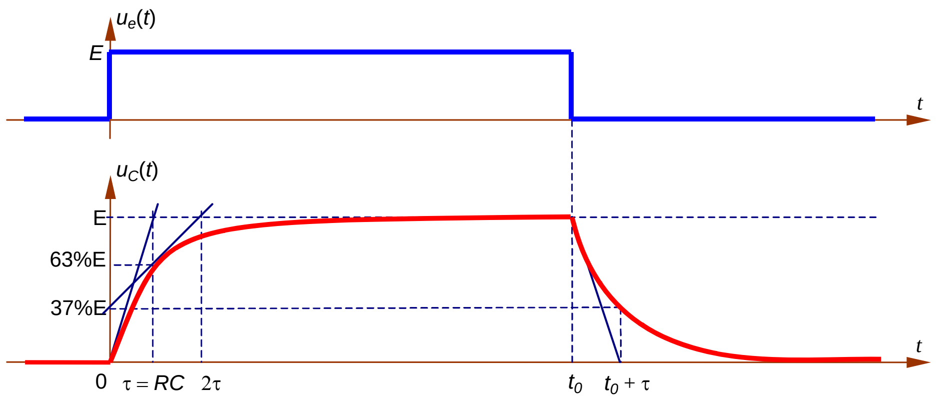


Figure 4 : réponse temporelle du circuit RC à un créneau de tension.

III.3. Réponse d'un système du premier ordre à une rampe

On applique au circuit précédent une rampe de pente P (en V/s), c'est-à-dire un signal évoluant linéairement avec le temps à partir de l'instant initial. A titre d'exemple, ce genre de signal se rencontre pour les ondes triangulaires.

Figure 5 : Circuit RC en réponse à une rampe de tension.

L'expression analytique de ce signal est :

$$u_e(t) = P \cdot t \quad \text{pour } t \geq 0$$

Ce circuit est régit par l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{P}{\tau}t \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ avec } \tau = RC$$

Le régime libre s'exprime de la même manière que précédemment :

$$u_1(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le régime permanent $u_2(t)$ provient de la recherche d'un polynôme de degré 1 :

$$u_2(t) = K_1 t + K_2$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient les constantes : $\begin{cases} K_1 = P \\ K_2 = -\tau P \end{cases}$, d'où :

$$u_2(t) = P(t - \tau)$$

Remarque : le circuit RC agit comme un retard de valeur τ sur le signal en régime permanent.

Le signal complet est :

$$u_C(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + P(t - \tau)$$

La condition initiale est donnée par la valeur à l'origine : $u_C(0) = 0$

D'où finalement l'expression de la tension $u_C(t)$ en réponse à la rampe de pente P :

$$\boxed{u_C(t) = \tau P(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + Pt}$$

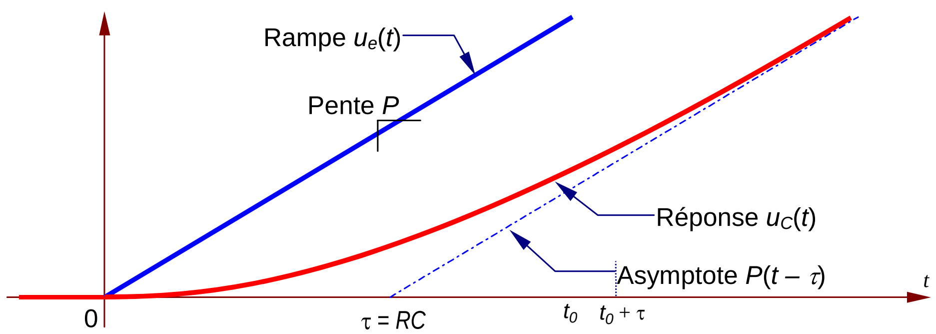


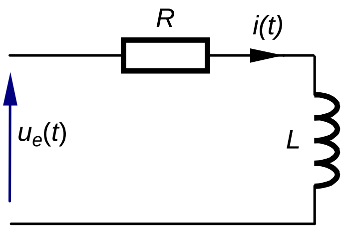
Figure 6 : réponse temporelle du circuit RC à la rampe de pente P.

III.4. Réponse sinusoïdale d'un système du premier ordre

On applique au circuit *RL* de la Figure 7 une tension sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude $U\sqrt{2}$ et de phase initiale nulle :

$$u_e(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t \quad \text{pour } t \geq 0$$

Puisque l'élément réactif est une inductance, il est plus intéressant d'évaluer le courant *i*(*t*).



auquel on applique

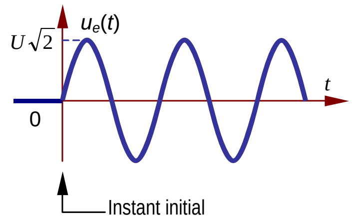


Figure 7 : circuit RL excité par un signal sinusoïdal.

Le courant dans ce circuit est régi par l'équation différentielle :

$$L\frac{di(t)}{dt} + R\cdot i(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t \quad \text{pour } t \geq 0$$

Pour des raisons de commodité, et parce qu'il est souvent préférable de traiter les fonctions circulaires de variables angulaires, on effectue le changement de variable $\theta = \omega t$, ce qui conduit à :

$$L\frac{di(\theta)}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega} + R\cdot i(\theta) = U\sqrt{2}\sin\underbrace{\omega t}_{=\theta}$$

donc $\dfrac{di(\theta)}{d\theta} + \dfrac{R}{L\omega}\cdot i(\theta) = \dfrac{U}{L\omega}\sqrt{2}\sin\theta$

Régime libre (Solution de $\dfrac{di(\theta)}{d\theta} + \dfrac{R}{L\omega}i(\theta) = 0$)

L'évaluation similaire aux précédentes conduit à :

$$i_1(\theta) = K\cdot e^{-\frac{\theta}{\frac{L\omega}{R}}}$$

L'expression $\dfrac{L\omega}{R}$ est la tangente de l'argument φ de l'impédance *R-L* : on pose $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$

Régime forcé

La solution particulière est recherchée sous la forme $i_2(\theta) = K_1\cos\theta + K_2\sin\theta$,

Ce qui conduit à : $\begin{cases} K_1 = -\dfrac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}U\sqrt{2} = -\dfrac{U\sqrt{2}}{Z}\sin\varphi \\ K_2 = -\dfrac{K_1}{\tan\varphi} = \dfrac{U\sqrt{2}}{Z}\cos\varphi \end{cases}$

Ce qui permet d'écrire le régime forcé, ou permanent, sous la forme :

$$i_2(\theta) = \frac{U\sqrt{2}}{Z}\sin(\theta - \varphi) \quad \text{avec } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \text{ le module de l'impédance de } R\text{-}L$$

Solution complète

$$i_2(\theta) = K \cdot e^{-\frac{\theta}{\tan\varphi}} + \frac{U\sqrt{2}}{Z}\sin(\theta - \varphi)$$

La condition initiale est donnée par la valeur à l'origine, $i(0) = 0$, qui conduit à la constante K :

$$K = \frac{U\sqrt{2}}{Z}\sin\varphi$$

D'où finalement l'expression du courant $i(\theta)$:

$$\boxed{i(\theta) = \frac{U\sqrt{2}}{Z}\left(\sin\varphi \cdot e^{-\frac{\theta}{\tan\varphi}} + \sin(\theta - \varphi)\right)}$$

avec $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$ et $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

On remarque que le déphasage φ du courant sur la tension apparaît dans l'expression du régime permanent qui seul subsiste après annulation du terme transitoire (Figure 8).

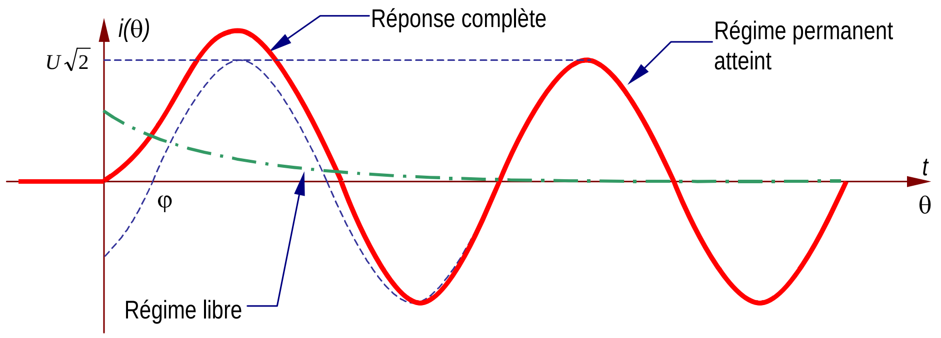


Figure 8 : réponse temporelle du circuit RL à une excitation sinusoïdale.

IV. Étude des circuits du deuxième ordre

IV.1. Forme générale de l'équation différentielle

Un circuit du deuxième ordre de grandeur d'entrée e(t) est régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2z\omega_0 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 s(t) = K_0 \cdot \omega_0{}^2 \cdot e(t)}$$

La présentation sous cette forme est dictée par le soucis de matérialiser les phénomènes qui se produisent pour des valeurs particulières des coefficients z et ω_0 :

- ω_0 est la pulsation propre du circuit exprimée en rad/s ;
- z est le coefficient d'amortissement du circuit, toujours positif, sans dimension ni unité physique ;
- K_0 est l'amplification statique du montage (dans le rapport des unités de s et e).

IV.2. Généralités sur la résolution

La résolution de cette équation différentielle suit un cheminement plus élaboré que pour le premier ordre en raison d'une nécessaire discussion sur la valeur des paramètres.

Le signe des coefficients, toujours positifs, élimine certaines solutions que l'on peut qualifier de « non physiques ».

IV.2.1. Régime libre

On utilise l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2z\omega_0 r + \omega_0{}^2 = 0$$

Sa résolution nécessite l'évaluation du discriminant (réduit) qui permet la discussion :

$$\Delta' = \omega_0{}^2 (z^2 - 1)$$

1er cas : $\Delta' > 0$

Cette condition est réalisée si $z^2 > 1$, c'est-à-dire $z > 1$ (car $z \geq 0$).

Les deux racines r_1 et r_2 sont réelles et strictement négatives (produit positif et somme négative) :

$$r_1 = \omega_0(-z - \sqrt{z^2 - 1}) \text{ et } r_2 = \omega_0(-z + \sqrt{z^2 - 1})$$

La SGESSM s'écrit alors :

$$\boxed{s_1(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}}$$

Ce régime transitoire est appelé **régime apériodique amorti**.

2ème cas : $\Delta' = 0$

Dans ce cas, $z^2 = 1$, c'est à dire $z = 1$ (car $z \geq 0$).

La racine r est double :

$$r = -\omega_0$$

La SGESSM s'écrit alors :

$$\boxed{s_1(t) = (K_1 t + K_2) e^{-\omega_0 t}}$$

Ce régime transitoire est appelé **régime apériodique critique**.

2ème cas : $\Delta' < 0$

Ici $z^2 < 1$, c'est à dire $z < 1$.

Les deux racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées :

$$r_1 = \omega_0(-z - j\sqrt{1 - z^2}) \text{ et } r_2 = \omega_0(-z + j\sqrt{1 - z^2}).$$

On isole les parties réelles et imaginaires en posant : $\alpha = -z\omega_0$ et $\beta = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$

La SGESSM s'écrit :

$$\boxed{s_1(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)}$$

α est strictement négatif , donc $e^{\alpha t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$, le régime est **pseudo-périodique** (ou **oscillatoire amorti**).

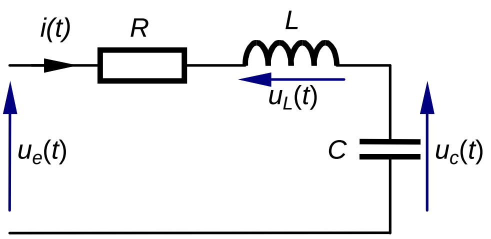
IV.2.2. Étude du régime forcé ou permanent

La recherche d'une SPEASM reprend le même principe : on cherche une solution de même nature que le second membre par identification des coefficients. Les solutions les plus courantes en électricité sont la constante, le polynôme ou les fonctions trigonométriques de même pulsation que celle de la source (qui matérialise le second membre).

La solution complète est la somme des deux solutions précédemment définies. La résolution se termine par la recherche des constantes grâce à la connaissance des conditions initiales.

IV.3. Exemple : circuit *RLC* série à la mise sous tension

Analysons le comportement du circuit *RLC* de la Figure 9 en déterminant les grandeurs $u_C(t)$, $u_L(t)$ et $i(t)$ lorsque l'on applique un échelon de tension d'amplitude *E*.



auquel on applique

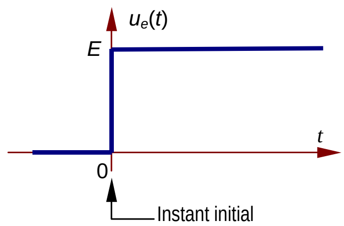


Figure 9 : circuit RLC série en réponse à l'échelon de tension d'amplitude E.

La mise en équation donne :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot u_C(t) = \frac{1}{LC}\cdot u_e(t)$$

Qui permet d'identifier les coefficients suivants :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \;\; ; \;\; z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \;\; ; \;\; K_0 = 1 \text{ (pas d'amplification statique)}$$

IV.3.1. Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM)

Le discriminant réduit s'exprime par :

$$\Delta' = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$$

Pour associer une interprétation physique aux résultats, on considère que les éléments *L* et *C* sont constants et que seule *R* varie. Le signe de Δ' dépend alors de la position de *R* par rapport à la résistance critique $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ qui annule Δ'.

Noté autrement : $z = \frac{R}{R_c}$ et $\Delta' = \omega_0{}^2 (\left(\frac{R}{R_c}\right)^2 - 1)$.

1^{er} cas : $R > R_c$ ($\Delta' > 0$), régime apériodique

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(-\frac{R}{R_c} - \sqrt{\left(\frac{R}{R_c}\right)^2 - 1}\right) < 0 \text{ et } r_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(-\frac{R}{R_c} + \sqrt{\left(\frac{R}{R_c}\right)^2 - 1}\right) < 0$$

$$\boxed{u_{C1}(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}}$$

$2^{ème}$ cas : $R > R_c$ ($\Delta' = 0$), régime apériodique critique

$$r = -\omega_0 = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{u_{C1}(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\omega_0 t}}$$

$3^{ème}$ cas : $R < R_c$ ($\Delta' < 0$), régime oscillatoire amorti

$$\alpha = -\frac{R}{R_c}\omega_0 \text{ et } \beta = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2}$$

$$\boxed{u_{C1}(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)}$$

$$\text{soit } \boxed{u_{C1}(t) = e^{-\frac{R}{R_c}\omega_0 t}\left(K_1 \cos(\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2}\, t) + K_2 \sin(\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2}\, t\right)}$$

IV.3.2. Solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM)

Une fois l'échelon établi, le second membre est $\frac{E}{LC}$.

La recherche d'une SPEASM sous la forme d'une constante fournit :

$$\boxed{u_{C2}(t) = E}$$

IV.3.3. Solution complète

La solution complète est la somme des 2 solutions partielles précédentes.

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales :

- continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0$
- continuité du courant dans l'inductance $i(0^+)=0$, d'où $u_L(0^+) = E$.

IV.3.3.1. 1^{er} cas : $R > R_c$ ($\Delta' > 0$), régime apériodique

$$u_{C1}(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + E$$

Recherche de K_1 et K_2

$$\left.\begin{aligned} &u_C(0) = K_1 + K_2 + E = 0 \\ &i(0) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) \Rightarrow r_1 K_1 + r_1 K_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &K_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}E = \frac{R - \sqrt{R^2 - R_c^2}}{\sqrt{R^2 - R_c^2}}E \\ &K_2 = \frac{-r_1}{r_1 - r_2}E = \frac{-R - \sqrt{R^2 - R_c^2}}{\sqrt{R^2 - R_c^2}}E \end{aligned}\right.$$

Expression des grandeurs essentielles du circuit

Tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2}e^{r_2 t}\right)}$$

Courant $i(t)$ dans les trois éléments

$$\boxed{i(t)=\frac{r_1 r_2}{r_1-r_2}CE(e^{r_1 t}-e^{r_2 t})} \text{ ou } \boxed{i(t)=\frac{2E}{\sqrt{R^2-R_c^2}}(e^{r_2 t}-e^{r_1 t})}$$

Tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance

$$\boxed{u_L(t)=\frac{r_1 r_2}{r_1-r_2}LCE(r_1 e^{r_1 t}-r_2 e^{r_2 t})} \text{ ou } \boxed{u_L(t)=\frac{2LE}{\sqrt{R^2-R_c^2}}(r_2 e^{r_2 t}-r_1 e^{r_1 t})}$$

Graphes des grandeurs

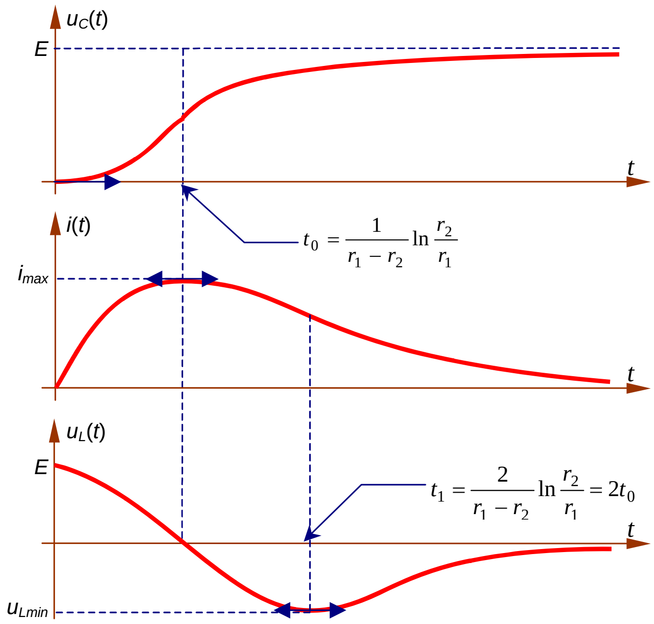


Figure 10 : les grandeurs essentielles du circuit en régime apériodique amorti.

Remarques

- Puisque le courant (image de la dérivée de la tension u_C) est nul à l'origine, la tension démarre avec une tangente horizontale.
- En t_0, l'inversion de la tension u_L, image de la dérivée seconde de la tension u_C, correspond bien au changement de sa courbure. Ce changement de concavité correspond aussi au maximum du courant qui se met à décroître.
- Après son inversion la tension aux bornes de l'inductance décroît jusqu'à son minimum en $t_1=2t_0$ pour tendre finalement vers zéro en changeant de concavité.

IV.3.3.2. 2ème cas : $R = R_c$ ($\Delta' = 0$), régime apériodique critique

$$u_C(t)=(K_1+K_2 t)e^{-\omega_0 t}+E$$

Recherche de K_1 et K_2

$$\left.\begin{array}{l} u_C(0)=K_1+E=0 \\ i(0)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0)\Rightarrow K_2-\omega_0 K_1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} K_1=-E \\ K_2=-\omega_0 E \end{array}\right.$$

Expression des grandeurs essentielles du circuit

Tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur

$$\boxed{u_C(t)=E-E(\omega_0 t+1)e^{-\omega_0 t}}$$

Courant $i(t)$ dans les trois éléments

$$\boxed{i(t)=\frac{E}{L}t\cdot e^{-\omega_0 t}}$$

Tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance

$$\boxed{u_L(t) = E(1-\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$

Graphes des grandeurs

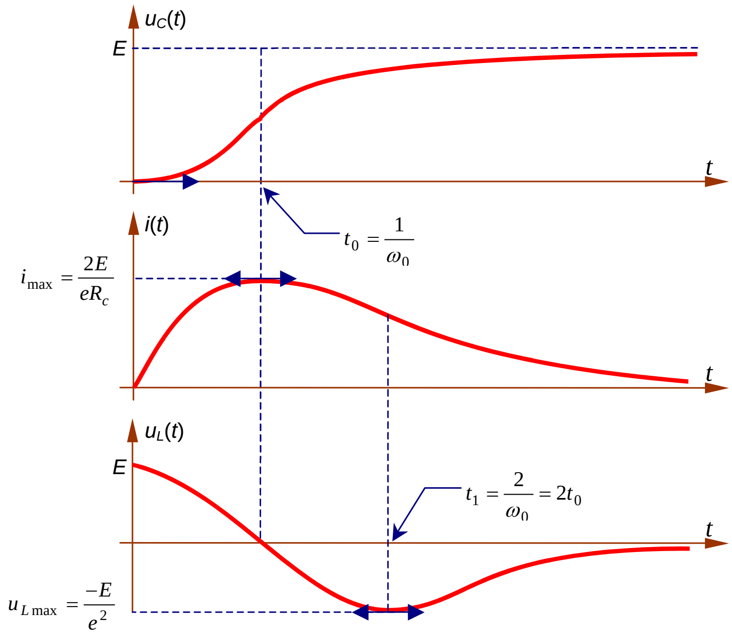


Figure 11 : les grandeurs essentielles du circuit en régime apériodique critique.

Remarques

Ces réponses, similaires à celles du régime apériodique, correspondent au temps minimum d'établissement (la plus faible valeur de t_0).

IV.3.3.3. 3ème cas : $R < R_c$ ($\Delta' < 0$), régime oscillatoire amorti

$$u_C(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t) + E \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{R}{R_c}\omega_0 \quad \text{et} \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2}$$

Recherche de K_1 et K_2

$$\left.\begin{aligned} & u_C(0) = K_1 + E = 0 \\ & i(0) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) \Rightarrow \alpha K_1 + \beta K_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & K_1 = -E \\ & K_2 = \frac{\alpha}{\beta}E = \frac{-R}{\sqrt{R_c^2 - R^2}}E \end{aligned}\right.$$

Expression des grandeurs essentielles du circuit

Tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur

$$\boxed{u_C(t) = Ee^{\alpha t}(-\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta t) + E}$$

Courant $i(t)$ dans les trois éléments

$$\boxed{i(t) = CE\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}e^{\alpha t}\sin \beta t} \text{ ou } \boxed{i(t) = \frac{2E}{\sqrt{R_c^2 - R^2}}e^{\frac{-R}{2L}t}\sin \frac{\sqrt{R_c^2-R^2}}{2L}t}$$

Tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance

$$\boxed{u_L(t) = LCEe^{\alpha t}(\alpha^2+\beta^2)(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta t)} \text{ ou } \boxed{u_L(t) = Ee^{\alpha t}(\cos \frac{\sqrt{R_c^2-R^2}}{2L}t - \frac{R}{\sqrt{R_c^2-R^2}}\sin \frac{\sqrt{R_c^2-R^2}}{2L}t)}$$

Graphes des grandeurs

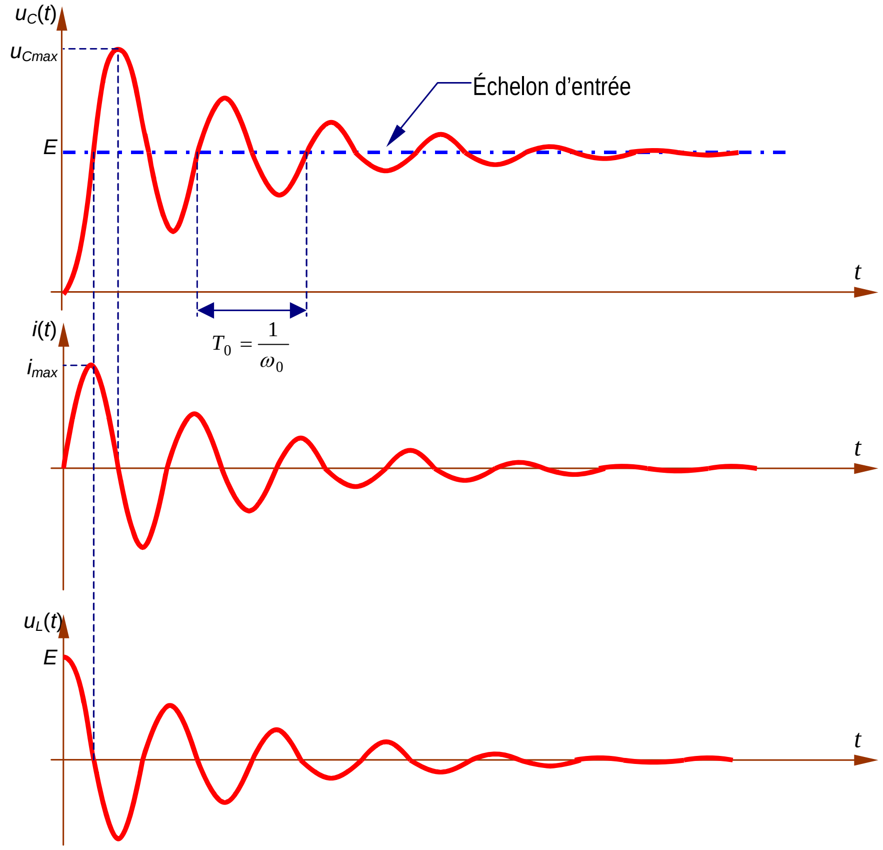


Figure 12 : les grandeurs essentielles du circuit en régime apériodique critique.

IV.3.4. Cas particulier du régime non amorti

Dans un circuit non dissipatif, c'est-à-dire pour lequel la résistance *R* est nulle, le coefficient d'amortissement z est nul. L'équation différentielle ne contient plus de terme dérivé d'ordre 1 :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C(t) = \frac{1}{LC} \cdot u_e(t)$$

La solution est alors de type oscillatoire (cas 3, $\Delta' < 0$), avec : $\alpha = 0$ et $\beta = \omega_0$

Elle prend la forme :

$$u_C(t) = E + K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t = E + U_{C\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Soit avec les conditions initiales :

$$\boxed{u_C(t) = E - E \cos \omega_0 t}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{2E}{R_c} \sin \omega_0 t}$$

$$\boxed{u_L(t) = -E \cos \omega_0 t}$$

Les grandeurs sont des fonctions sinusoïdales du temps, c'est à dire purement oscillatoires.

C'est le cas de figure que l'on rencontre pour les oscillateurs sinusoïdaux. Le problème technologique consiste alors à annuler la résistance équivalente du circuit.

V. Bibliographie

- [1] **xx.** Analyse 2 : Algèbre et géométrie – BTS et DUT secteur industriel. Hachette.