

Ex. 8

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ -y-7z=-5 \\ -2y-14z=-10 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ -y-7z=-5 \end{cases}$$

$0=0$ le système est compatible

Il est de rang 2, avec $p=3$ inconnues
 Il y a donc une infinité de solutions à un paramètre.
 (2 par exemple)

$$(L_2) \Leftrightarrow \boxed{y = -7z + 5}$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x = 2 - 2y - 3z$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - 2(-7z + 5) - 3z$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 14z - 10 - 3z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 11z - 8}$$

Les solutions ont donc les colonnes X du type

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11z-8 \\ -7z+5 \\ z \end{pmatrix} = z \times \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}$$

$$X \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow X \in \left[\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] + \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c'est une droite affine)