

### Exercice 3

(1) (E):  $3y' + 2y = 0$  } équations  
                                              d'ja homogènes

• (ER):  $y' + \frac{2}{3}y = 0$

Les solutions de (ER) (donc de (E)) sont les fonctions  $y$  telles que  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-\frac{2}{3}t}$

• avec la condition initiale  $y(0) = 4$ , on obtient

$$\lambda e^0 = 4 \text{ donc } \lambda = 4$$

La solution du problème de Cauchy posé est donc la fonction  $y$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = 4e^{-\frac{2}{3}t}$

(2) (E):  $y' + 3y = 10 \cos(t)$

• (EH):  $y' + 3y = 0$  (d'ja réduite)

Les solutions de (EH) sont les fonctions  $y_H$  telles que  $\forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = \lambda e^{-3t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  constante

{Attention! la condition initiale ne porte pas sur  $y_H$ , mais sur la solution  $y$  de (E)}

• On cherche  $y_p$  une solution de (E), sous la forme  $y_p(t) = h_1 \cos(t) + h_2 \sin(t)$

$$y_p \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) + 3y_p(t) = 10 \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -h_1 \sin(t) + h_2 \cos(t) + 3h_1 \cos(t) + 3h_2 \sin(t) = 10 \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (h_2 + 3h_1) \cos(t) + (3h_2 - h_1) \sin(t) = 10 \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_2 + 3h_1 = 10 & (L_1) \text{ (identification)} \\ 3h_2 - h_1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) + 3(L_2) \text{ donne } h_2 + 3h_1 + 3(3h_2 - h_1) = 10 + 3 \times 0$$

$$10h_2 = 10$$

$$\boxed{h_2 = 1}$$

$$(L_2) \text{ donne alors } 3h_2 = h_1$$

$$\boxed{3 = h_1}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{On pose donc} \\ y_p(t) = 3 \cos(t) + \sin(t) \end{array} \right.$$

• Les solutions de (E) sont les fonctions  $y$  de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-3t} + 3 \cos(t) + \sin(t)$$

De plus, si  $y(0) = 2$ , alors cela donne

$$\lambda e^0 + 3 \cos(0) + \sin(0) = 2 \Leftrightarrow \lambda + 3 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$\text{La solution est donc : } \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = -e^{-3t} + 3 \cos(t) + \sin(t)$$