TSI1 2023/2024 : Concours blanc de mathématiques (4h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : (extrait CCINP 2022)

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé usuel $(O;\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}$ est la base orthonormée directe usuelle $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$.
On considère le plan (S) d'équation "$x+y+z=0$".
Remarque : on pourra si nécessaire, utiliser un schéma pour expliciter la réponse à certaines questions

1. (a) Vérifier que l'origine O et les points $M(1;0;-1)$ et $N(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$ appartiennent à (S).
   (b) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ forment une base du plan (S).
   (c) Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$
   (d) Donner une interprétation géométrique de la norme de ce produit vectoriel.
   (e) Vérifier que le point $A(0;1;1)$ n'appartient pas au plan (S).
   (f) Calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OA}$.
   (g) Donner une interprétation géométrique de ce produit mixte
   (h) Donner un vecteur normal au plan (S)
   (i) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan (S)
   (j) Calculer la distance du point A au plan (S)
2. On souhaite effectuer un changement de base orthonormée directe de telle sorte qu'une équation du plan (S) devienne $''z=0''$ dans la nouvelle base.
   On considère la famille $\mathscr{B}'$ formée par les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{u_y}$ de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, et $\overrightarrow{u_z}$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale.
   (c) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale directe.
   (d) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base $\mathscr{B}$ a pour coordonnées $(0,0,\sqrt{3})$ dans la base $\mathscr{B}'$.
   (e) Justifier que l'équation du plan (S) dans le repère $(O;\mathscr{B}')$ est $''z'=0''$
   (en appelant $(x';y';z')$ les coordonnées d'un point dans la base $\mathscr{B}'$))

Exercice 2 : (d'après CCP 2008)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xcos(x) - sin(x)$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.

1. (a) Justifier la possibilité de restreindre l'étude de f à $[0; +\infty[$
   (b) Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C})$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$.
   Etudier, en fonction de la parité de n, les variations de f sur I_n
3. Montrer que les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$ (*Echelle : π= 2 carreaux sur les deux axes*)
5. Montrer que l'équation $''f(x) = 0''$ admet dans tout intervalle I_n une unique solution, que l'on notera x_n(on ne cherchera pas à la calculer !)
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$
7. En déduire un équivalent de x_n pour $n \to +\infty$
8. Montrer que pour tout $n \in N$, $x_n = tan(x_n)$ puis que $x_n = n\pi + arctan(x_n)$
9. En déduire que $x_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \epsilon_n$, où ϵ_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
   ($\textit{on rappelle que pour } x > 0, arctan(x) = \dfrac{\pi}{2} - arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$)

Exercice 3 : (d'après EPITA 2023)
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on d'ésigne par $cd(P)$ son coefficient dominant et par $deg(P)$ son degré.
On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
2. Déterminer les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$. En déduire celles de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$
3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\dfrac{17}{8}$
4. Démontrer(simultanément) par une récurrence double que $cd(T_n) = 2^{n-1}$ et $deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, T_n\left(\dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})\right) = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$
6. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P(cos(\theta)) = cos(n\theta)$$
8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de $cos(4\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$.
   (*On pourra dériver la relation de la question 7*)

Exercice 4 :(d'après CCINP 2023) On définit pour $x > 0$ la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$$

1. Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que $f(1) = ln(2)$ et que $f(2) = 1 - ln(2)$.
   On pourra remarquer que pour $t \in [0;1], 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t}$
   (b) Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire que pour $t \in [0;1], n \in N^*$,
   $$1 - (-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$
   (c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$f(n) = (-1)^{n-1}ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$
   on pourra remarquer que $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$
2. Variations de f
   (a) Rappeler la définition d'une fonction décroissante g définie sur un intervalle I.
   (b) Soit α et β deux réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$ et $t \in]0;1]$.
   Comparer t^α et t^β et en déduire que f est décroissante sur $]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, et $t \in]0;1]$,
   $$\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}$$
   En déduire que pour $x > 0$,
   $$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$
   (d) En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points d'abscisse 1 et 2(on donne $ln(2) \approx 0,7$).
3. Equivalent de f en $+\infty$
   (a) Montrer que pour $x > 0$,
   $$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$
   (b) En utilisant le résultat 2b), montrer que pour $x > 1$,
   $$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1)$$
   (c) En déduire un équivalent de f en $+\infty$