TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,8$ de mathématiques (2h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : Equivalents de suites

Déterminer un équivalent, puis la limite des suites ci-dessous (justifier vos calculs) :

a $u_n = \dfrac{n^7 - 3n^2 + 1}{15n^4 - 5n^3 + 3}$

b $\mathrm{v}_n = sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c $w_n = \sqrt{n^2+1} - n$

d $x_n = \dfrac{ln(n^3+n)}{ln(2^n+n^2)}$

Exercice 2 : étude de suites définies par une relation de récurrence

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

   (a) Donner l'ensemble de définiton et de dérivation de f et calculer sa dérivée.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) En déduire le tableau de variations complet de f.
   (d) Justifier que si $x \in [1;2]$, alors $f(x) \in [1;2]$.

2. On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1} \quad pour \quad tout \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{v}_0 & = 2 \\ \mathrm{v}_{n+1} & = \dfrac{2\mathrm{v}_n+1}{\mathrm{v}_n+1} \quad pour \quad tout \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) Démontrer par récurrence que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admettra que de même, $1 \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant 2$
   (b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
   (*c'est-à-dire que* $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ *pour tout entier* n). On admettra que (v_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l que l'on déterminera.

Exercice 3 : Factorisation de polynômes

1. On considir̀e le polynôme $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$
   (a) Vérifier que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   (b) En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer le polynôme $Q(X) = X^6 - 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

On note $F = \{(x;y;z) \in E \ tel\ que\ x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(t;2t;t) \in E \ avec\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.