TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,7$ de mathématiques (4h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : développements limités
(*Donner la formule du cours que vous utilisez*)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt{1-2x}$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 4 de e^x
3. A l'aide de développements limités, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \times cos(x) - sin(x)}{tan(x) - x}$

Exercice 2 : étude de fonction
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = ln(2 + 2x + x^2)$$

1. Justifier que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, et son minimum.
5. Effectuer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
   (*Remarque : on pourra poser* $t = x + \dfrac{x^2}{2}$)
6. Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe de f en 0.
7. En expliquant ce qu'on déduit du développement limité, dessiner T_0 et l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2;2]$
   Aide : $ln(2) \approx 0,7$ *et* $ln(10) \approx 2,3$
   Echelle suggérée : 4 carreaux pour une unité sur les deux axes

Exercice 3 : sommes
Déterminer une formule explicite pour les expressions suivantes

1. $\forall n \geqslant 3, S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}(3k-4)$ puis donner la valeur de S_{10}.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k \times 3^{n-k})$. (on simplifiera le plus possible l'expression).
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$. (astuce : $k = k+1-1$)
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$. Celle-ci n'est pas évidente : on va détailler le calcul
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, rappeler la formule explicite de $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$
   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Que vaut V_n ?(on simplifiera le plus possible l'expression)

Exercice 4 : Raisonnement par récurrence Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

On prendra soin de bien rédiger toutes les étapes du raisonnement.

On pourra par exemple appeler S_n la somme étudiée et $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ »

Exercice 5 : étude d'une suite ($\approx$ 14 pts)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{n}{3} + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+3-u_n}{3}$
   (b) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier n, $u_n \leqslant n+3$. (*On prendra soin de bien rédiger toutes les étapes du raisonnement*)
   (c) Déduire des deux questions précédente la monotonie de la suite (u_n).
2. On définit la suite $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{v}_n = u_n - n$$

   (a) En exprimant v_{n+1}, démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   (b) En déduire une expression explicite de v_n, puis de u_n.

Exercice 6 : nombres complexes
Le but de l'exercice est de calculer une valeur exacte de $A = cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.

1. Pour k entier avec $0 \leqslant k \leqslant 6$, on appelle z_k le nombre complexe $exp\left(i\frac{2\pi k}{7}\right)$.
   (a) Que vaut $(z_k)^7$?
   (b) En déduire que la somme $B = \sum_{k=0}^{6} z_k$ vaut 0.
   (c) Justifier que $z_6 = \overline{z_1}$, que $z_5 = \overline{z_2}$ et que $z_4 = \overline{z_3}$
   (d) En déduire que $B = 1 + 2\sum_{k=1}^{3} Re(z_k)$
2. Que vaut A ?