TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,6$ de mathématiques (4h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : systèmes

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$:
(il est demandé d'utiliser la méthode du pivot de Gauss, d'indiquer les opérations utilisées, de donner le rang du système et le type de solution associé)

a

$$\begin{cases} 2x - y + 2z & = -1 \\ -x + 2y - 2z & = -3 \\ x - 2y + 3z & = 5 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = 0 \\ -4x + 2y + z & = 0 \\ -2x + y + 4z & = 0 \\ 10x - 5y - 6z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(3;2;-1), B(4;0;3)$ et $C(4;1;2)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que ces 3 points forment un plan $(\mathcal{P})$.
   (c) Déterminer un vecteur normal à $(\mathcal{P})$, puis une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.
2. On considère le point $E(1;4;5)$.
   (a) Vérifier que E n'est pas sur le plan $(\mathcal{P})$
   (b) Ecrire une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par E, et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
   (c) Déterminer le projeté orthogonal (qu'on notera H) de E sur $(\mathcal{P})$.
   (d) En déduire la distance de E à $(\mathcal{P})$.
3. On étudie ici les points de coordonnées $(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 5 = 0$$

   (a) Démontrer que ces points forment une sphère $(\mathcal{S})$ de centre A et de rayon à déterminer.
   (b) Vérifier que $F(4;0;1)$ est sur $(\mathcal{S})$.
   (c) Déterminer l'équation du plan tangent $(\mathcal{P}')$ à $(\mathcal{S})$ au point F.

Exercice 3 : Monotonie de suites

Déterminer si ces suites sont croissantes ou décroissantes, et à partir de quel rang :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - 2^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{v}_n = \dfrac{3^n}{2n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = -n^3 + 6n^2 + 15n - 9$
4. $\begin{cases} x_0 & = 3 \\ x_{n+1} & = x_n \times \dfrac{n+1}{n^2 - 6n + 13}, \textit{pour tout} \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (on admet que x_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4 : Etude d'une suite

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_1 & = 6 \\ u_{n+2} & = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n, \textit{pour tout} \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but du problème est de déterminer une forme explicite de la suite (u_n).

1. Calculer u_2 et u_3.
2. On pose $\mathrm{v}_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$
   (a) Que vaut v_0 ?
   (b) Démontrez que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
   (*Remarque : cela revient à montrer que pour tout entier n, $\mathrm{v}_{n+1} = \mathrm{v}_n$*)
   (c) En déduire que pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4}$
3. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - 7$
   (a) En utilisant 2(c), démontrez que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Donnez une formule explicite de w_n en fonction de n
   (c) En déduire une formule explicite pour u_n

Exercice 5 : Equations différentielles

On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in]0;+\infty[, x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0 \qquad (E)$$

C'est une équation différentielle à coefficients non constants, qu'on ne sait donc pas résoudre à ce stade.

1. Soit y une fonction définie sur $]0;+\infty[$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t)$.
   Exprimer les dérivées $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y' et y''.
2. Démontrer que y est solution de (E) si, et seulement si z est solution de l'équation à coefficients constants :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0 \qquad (E_2)$$
   Remarque : on pourra poser $x = e^t$
3. Résoudre (E_2).
4. En déduire les solutions y de (E).
5. Déterminer la seule solution de (E) qui vérifie $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$

Exercice 6 : Matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans cette question, M désigne une matrice carrée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec A, c'est-à-dire que $A \times M = M \times A$.
   On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, u, v, w, x, y, z$ des nombres réels.
   (a) Calculer $A \times M$ et $M \times A$.
   (b) Démontrer que M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
   (c) Ecrire la matrice M^2 en fonction de a, b et c.
2. On se propose de montrer que A n'a pas de racine carrée, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune matrice N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = A$.
   (a) Montrer que si une telle matrice N existe, alors elle doit forcément vérifier : $AN = NA$(elle commute avec A)
   (b) En utilisant le résultat 1c), en déduire qu'une telle matrice N n'existe pas
3. L'objectif de cette question est de trouver une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $PA = P - A$
   (a) Montrer que la matrice B définie par $B = I_3 - A$ est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Soit P une matrice vérifiant $PA = P - A$.
   Montrer que $P = A \times B^{-1}$
   (c) En déduire la matrice P