TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,4$ de mathématiques (2h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : Droite et cercle dans le plan (≈ 12 pts)
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left\{O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right\}$ dans lequel sont indiquées les coordonnées

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ déquation cartésienne $3x - y + 19 = 0$ et le point $A(-2; 3)$.
   (a) Vérifier que A n'est pas sur $\mathscr{D}$
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.
   (c) En déduire le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, qu'on appellera H.
   (d) Quelle est la distance de A à la droite $\mathscr{D}$?
2. On considère l'ensemble des points $(x; y)$ du plan qui vérifie $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$.
   (a) Vérifier que cet ensemble est un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.
   (b) On considère la droite (EF) passant par les points $E(-1; 6)$ et $F(5; 4)$.
   Déterminer un système d'équations paramétriques de cette droite.
   (c) Déterminer les points d'intersection de (EF) et du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 : Barycentres (≈ 6 pts)
On considère un triangle ABC de centre de gravité G(c'est-à-dire que G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$).
On cherche à déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

1. Pour un point du plan M, exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
2. Justifier l'affirmation suivante :
   "Dire que M appartient à (Δ) équivaut à dire que $\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$"
3. En déduire quel est l'ensemble (Δ) et effectuer un dessin représentant la situation(le triangle ABC est quelconque).

Exercice 3 : interprétation géométriques des complexes(≈ 8 pts)
Dans le plan complexe, on considère les points A,B,C d'affixes respectives

$$z_A = 3 + (-1 + 2\sqrt{3})i$$

$$z_B = 1 - 2\sqrt{3} + i$$

$$z_C = 1 - i$$

On pose $z_1 = z_A - z_C$ et $z_2 = z_B - z_C$.

1. Calculer les modules $|z_1|$ et $|z_2|$.
2. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Déterminer une forme exponentielle de z_1 puis de z_2.
4. Placer les 3 points A, B et C sur un graphique **en mettant en évidence les réponses aux questions précédentes**.

Exercice 4 : Equations dans $\mathbb{C}$ (≈ 8 pts)
Résoudre les équations suivantes (bien expliquer la démarche et les notations choisies) :

1. $z^2 - 2z + 10 = 0$
2. $z^2 + (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$

Exercice 5 : linéarisation (≈ 8 pts)

1. Rappeler les deux formules d'Euler.
2. Rappeler la formule de développement de $(\alpha + \beta)^3$(binôme de Newton).
3. En déduire la forme linéarisée de l'expression $sin(2x)cos^3(x)$.
   (*Remarque : c'est-à-dire une forme du type* $\alpha sin(x) + \beta sin(3x) + \gamma sin(5x)$)