Nom :

TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,3$ de mathématiques (2h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Mettez votre nom sur la feuille, vous devez rendre la partie graphique au verso

Exercice 1 : Equations différentielles (≈ 12 pts)
(*Expliquer clairement votre démarche de résolution*)

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 9y = 12 \\ y(0) = 2 \\ \\ y'(0) = -6 \end{cases}$$

2. On considère l'équation $(E) : y'' + y' - 2y = 2t + 1 + 6e^t$
   (a) Résoudre l'équation $(EH) : y'' + y' - 2y = 0$.
   (b) Chercher une solution particulière de l'équation $(E1) : y'' + y' - 2y = 2t + 1$
   (c) Chercher une solution particulière de l'équation $(E2) : y'' + y' - 2y = 6e^t$
   (d) Quelles sont toutes les solutions de (E) ?

Exercice 2 : géométrie dans le plan (≈ 12 pts)
(*Remarque : il est particulièrement demandé d'expliquer les calculs*)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left\{O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right\}$ dans lequel sont indiquées les coordonnées

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$
   (a) Démontrer que $\{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\}$ est une base du plan.
   (b) Cette base est-elle orthogonale ? Est-elle orhonormée ?
   (c) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette nouvelle base.
   (d) Pour quelle valeur de t le vecteur $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}t-3\\t+2\end{pmatrix}$ est-il colinéaire à $\overrightarrow{w}$?
2. On considère les points $A(-1; 2), B(-3; 4), C(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $(\mathscr{D})$ la droite qui a pour équation cartésienne $(\mathscr{D}) : 3x - y + 4 = 0$.
   (a) Déterminer deux points de $(\mathscr{D})$(de votre choix).
   (b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
   (c) Déterminer un système d'équation paramètriques de la droite (AB).
   (d) Quel est le point d'intersection de (AB) et $(\mathscr{D})$?

Exercice 3 : Calculs divers(≈ 10 pts)

1. Résoudre l'inéquation(on précisera son ensemble de définition)

$$\frac{4}{x-1} > \frac{3}{x+2}$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et le domaine de dérivation $\mathscr{D}_{f'}$ de f
   (b) Calculer $f'(x)$, pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$
   (c) En déduire la dérivée sur $]1; +\infty[$ de la fonction g définie par

$$g(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

   (on simplifiera l'expression le plus possible)

Exercice 4 : Etude de tangentes (≈ 10 pts)
On considère la fonctions f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{2x + 2}$$

1. Démontrer que pour $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 3}{2(x+1)^2}$
2. On a représenté ci-dessous la courbe représentative de f et une de ses tangentes (T).
   On rappelle la formule donnant l'équation de la tangente au point d'abscisse a :
   $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   (a) Déterminer par le calcul l'équation de la tangente (T_0) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (b) Tracer (T_0) sur le graphique. Que constate-t-on ?
   (c) Résoudre par le calcul l'équation $f'(x) = \dfrac{3}{2}$ sur $]-1;+\infty[$.
   (d) Expliquer pourquoi la résolution de l'équation précédente permet de déterminer le point en lequel la droite (T) est tangente à $\mathcal{C}_f$.