TSI1 2023/2024 : DS $n^o\,2$ de mathématiques (2h)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 : calculs de dérivées ($\approx$ 9 pts)
Calculer une expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes, en donnant leur domaine de définition, et en donnant la formule utilisée :

1. f telle que $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$
2. g telle que $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$
3. h telle que $h(x) = ln\left(\dfrac{2x-1}{x+4}\right)$(il y a un peu de travail sur le domaine de définition)

Exercice 2 : primitives et intégrale($\approx$ 9 pts)

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :
   (a) f telle que $f(x) = 2e^{-4x+1}$
   (b) g telle que $g(x) = \dfrac{3}{x^4}$
2. Calculer les intégrales suivantes
   (a) $I = \displaystyle\int_1^2 (x^2 - 4x + 1)\,dx$ (écrire le résultat sous forme d'une fraction irréductible)
   (b) $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 3 : équations différentielles d'ordre 1 ($\approx$ 12 pts)
Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants(on détaillera bien toutes les étapes de la résolution) :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, 4y'(t) - 3y(t) = 2 \quad (E_1)$ avec la condition $y(0) = 2$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 4y(t) = cos(2t) \quad (E_2)$ avec la condition $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Exercice 4 : Détermination de limites ($\approx$ 12 pts)

1. On étudie dans cette question la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 3x + 2}$$
   (a) Quel est le domaine de définition de f(qu'on notera $\mathscr{D}_f$) ?
   (b) Déterminer les limites de $f(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.
   (c) Déterminer les limites de $f(x)$ pour $x \to 1$(on distinguera limite à droite et limite à gauche).
   (d) Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to 2$.

2. On étudie dans cette question la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$
   (a) Expliquer pourquoi l'étude de $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ donne une forme indéterminée.
   (b) Rappeler la définition du taux d'accroissement d'une fonction f en 1.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.