**Chapitre 12 : Espaces vectoriels**

# 1 Notion d'espace vectoriel

L'idée est d'identifier les ensembles qui obéissent à des règles de calcul similaires, inspirées de ce qu'on sait sur les vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ par exemple.
On peut ajouter deux vecteurs, on peut multiplier un vecteur par un nombre réel, on a le concept du vecteur nul, de l'opposé d'un vecteur, etc...

Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K}$ pour décrire ce qu'on appelle le corps de base, pour nous ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
Soit $E$ un ensemble(de nombres, de vecteurs, de fonctions, de polynômes...).

**Définition 1**

*Si $E$ et $F$ sont deux ensembles, on appelle* **ensemble produit**, *noté $E \times F$, l'ensemble des couples constitués d'un élément de $E$ et d'un élément de $F$.*
$E \times F = \left\{(x; y) \ avec \ x \in E \ et \ y \in F\right\}$.
*On note $E^2$ l'ensemble $E \times E$.*
*On note $E^n$ l'ensemble $E \times E \times \cdots \times E$ (n fois).*

**Définition 2**

*On appelle* **loi de composition interne** *sur $E$ une fonction $E^2 \longrightarrow E$.*
*On appelle* **loi de composition externe** *de $\mathbb{K}$ sur $E$ une fonction $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$.*

**Définition 3 (*Espace vectoriel*)**

*On dit que $E$ est un* $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** *(ou* **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$*) s'il existe :*

1. *une loi de composition interne notée "+" qui a les propriétés suivantes :*
   - *elle est commutative : pour tout $(u; v) \in E^2$, $u + v = v + u$.*
   - *elle est associative : pour tout $(u; v; w) \in E^3$, $(u + v) + w = u + (v + w)$*
   - *elle admet un élément neutre noté $0_E$, appelé* **vecteur nul** *: pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$*
   - *tout vecteur de $E$ admet* **un opposé** *: pour tout $u \in E$, il existe $v \in E$ tel que $u + v = 0_E$.*
     *$v$ est alors noté $-u$.*
2. *une loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur $E$, noté $\cdot$ qui a les propriétés suivantes :*
   - *elle est distributive par rapport au "+" : pour tout $(\alpha; u; v) \in \mathbb{K} \times E \times E$, on a*
     *$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ et $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$*
   - *elle est associative : pour tout $(\alpha; \beta; u) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E$, on a $(\alpha \times \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$*
   - *elle admet un élément neutre, noté $1_{\mathbb{K}}$ : pour tout $u \in E$, on a $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$.*

*Remarque : calculs avec les éléments neutres* : pour tout $(\alpha; u) \in \mathbb{K} \times E$,
- $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
- $\alpha \cdot 0_E = 0_E$ (on dit que $0_E$ est **absorbant**)
- si $\alpha \cdot u = 0_E$, alors soit $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$
- $-1_{\mathbb{K}} \cdot u = -u$

⚠ La notion d'espace vectoriel n'implique pas de multiplication interne(du type $u \times v$), donc en particulier pas forcément de $1_E$.
(il est possible qu'une telle multiplication existe, mais ça n'a rien à voir avec la structure d'espace vectoriel)

**Proposition 1 (*Espaces vectoriels de référence*)**

- *$\mathbb{R}$ lui-même est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, avec l'addition et la multiplication classiques.*
  *Dans ce cas précis, la multiplication est à la fois interne et externe, car $\mathbb{K}$ et $E$ sont identiques.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*
- *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I$, noté $C^0(I;\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le 0 est la fonction constante égale à 0)*
- *Soit $T$ un réel positif. L'ensemble des fonctions $T$-périodiques sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*
- *L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- *L'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (le 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls)*
- *L'ensemble des suites réelles, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le 0 est la suite constante ègale à 0)*

**Définition 4**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ un ensemble (non vide) inclus dans $E$.*
*On dit que $F$ est un* **sous-espace vectoriel** *de $E$ si $F$, muni des lois de composition interne et externe de $E$ restreintes à $F$, est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

On abrège souvent "sous-espace vectoriel" en "sev"(mais pas sur une copie, bien sûr).
*Remarque :* $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\{0_E\}$(ensemble à un seul élément) est un sous-espace vectoriel de $E$.
Ce sont les sous-espaces vectoriels dits "triviaux" de $E$.
*Exemples :*

- pour $E = \mathbb{R}^2$, les droites passant par l'origine sont toutes des sous-espaces vectoriels de $E$.
- pour $E = \mathbb{R}^3$, les plans passant par l'origine, et les droites passant par l'origine sont tous des sous-espaces vectoriels de $E$.

**Propriété 1 (*Caractérisation des sous-espaces vectoriels*)**

*Soit $F$ un sous-ensemble de $E$.*
*$F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si $0_E \in F$ et $F$ est stable par combinaison linéaire,*
*c'est-à-dire que pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u;v) \in F^2$, $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$ appartient à $F$.*

*Pour simplifier les écritures, on peut montrer cette dernière propriété en deux temps :*
- *pour tout $(u;v) \in F^2$, $u + v \in F$*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot u \in F$*

Cette propriété est ce qui est le plus souvent utilisée pour prouver qu'un ensemble donné est un espace vectoriel, en le voyant comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence
(cf proposition précédente).
*Exemples* : montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. $\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ tels\ que\ x + y = 0\right\}$
2. $\mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré inférieur ou égal à $n$)
3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $y'' + 4y = 0$

# 2 Opérations entre espaces vectoriels

Dans tout cette partie, on suppose donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

## 2.1 Somme

**Proposition 2**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*On note $F+G$ l'ensemble $\{v+w,\ avec\ v\in F\ et\ w\in G\}$.*
*Alors, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Définition 5**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*On dit que $F$ et $G$ sont* **en somme directe** *si pour tout $u\in F+G$, il existe un* **unique** *couple $(v;w)\in F\times G$ tel que $u=v+w$.*
*On note alors $F\bigoplus G$ (plutôt que simplement $F+G$).*

**Propriété 2 (*Caractérisation d'une somme directe*)**

*Deux sous-espaces vectoriels* $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe si, et seulement si } F\cap G=\{0_E\}.}$

Démonstration à voir en cours.

**Définition 6**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*On dit que $F$ et $G$ sont* **supplémentaires** *dans $E$ si $E=F\bigoplus G$.*
*On dit aussi que $G$ est un supplémentaire de $F$ (et réciproquement).*

*Remarques* :

— il y a deux informations dans le terme "supplémentaires" : la somme $F+G$ est directe **et** la somme $F+G$ "remplit" l'espace $E$ en entier.

— ne pas confondre "supplémentaires" et "complémentaires" : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de $E$ n'est de toute façon même pas un sous-espace vectoriel(il ne contient pas $0_E$)

— un sous-espace vectoriel donné peut avoir plusieurs supplémentaires (exemple : une droite dans le plan)

## 2.2 Intersection et espace engendré

**Proposition 3**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*Alors, $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

*Plus généralement, si $F_1, F_2\dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$,*
*alors $\bigcap_{k=1}^{n} F_k$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

⚠ La réunion $F\cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

**Définition 7**

*Soit $X$ une partie de $E$ (pas forcément un sous-espace vectoriel).*
*Alors, il existe un sous-espace vectoriel minimal(au sens de l'inclusion) de $E$ qui contient tous les éléments de $X$.*
*Ce sous-espace vectoriel est appelé* **espace vectoriel engendré** *par $X$, noté $\boxed{Vect(X)}$*

"minimal au sens de l'inclusion" signifie que $Vect(X)$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel vérifiant cette propriété(contenir tous les éléments de $X$).

**Propriété 3 (*Caractérisation de l'espace engendré*)**

*Si $X$ est un ensemble fini, $X = \{x_1;\dots;x_n\}$, alors $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1;\dots;x_n$.*

$$\boxed{Vect(X) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,\ avec\ (\alpha_1;\dots;\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}}$$

*Remarque :* ça peut aussi être une manière de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel si on arrive à ses éléments comme des combinaisons linéaires.
*Exemples :*

— pour un vecteur, $Vect(\overrightarrow{u}) = \{\alpha\cdot\overrightarrow{u};\alpha\in\mathbb{K}\}$.
C'est ce qu'on appelle une **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{u}$.

— pour deux vecteurs, $Vect(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \{\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v};(\alpha;\beta)\in\mathbb{K}^2\}$.
C'est ce qu'on appelle un **plan vectoriel** engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

**Exercices :**

— Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\ tel\ que\ 2XP' - 4P = 0\}$. Expliciter $F$ et l'écrire comme un espace engendré.

— Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $G = Vect(X^2 + X + 1; 2X - 1)$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a;b;c$ pour qu'un polynôme $aX^2 + bX + c$ appartienne à $G$.

**Proposition 4**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
$\boxed{Vect(F\cup G) = F+G}$

**Démonstration :** $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
$F+G$ contient $F$ et il contient $G$, donc il contient $F\cup G$.
Ainsi, $Vect(F\cup G) \subset F+G$.

Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$ contenant $F\cup G$. Le but est de montrer que $F+G\subset H$(on aura alors bien montré que $F+G$ est le sous-espace minimal contenant $F\cup G$).
Soit $v\in F$ et $w \in G$.
Alors $v\in H$ et $w\in H$ car $H$ contient $F$ et contient $G$.
Donc, $v+w\in H$, car $H$ est un espace vectoriel.
Ainsi, $F+G\subset H$. CQFD

# 3 Familles de vecteurs et dimension

## 3.1 Bases d'un espace vectoriel

Dans cette section, $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

**Définition 8**

*$(u_1,\dots,u_n)$ est une **famille génératrice** de $E$ si $\boxed{E = Vect(u_1,\dots,u_n)}$, c'est-à-dire qu'on peut construire tout vecteur de $E$ à l'aide de combinaisons linéaires de la famille $(u_1,\dots,u_n)$.*
*Dans ce cas, pour tout $x\in E$, il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$.*
*On dit aussi que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ **engendre** l'espace vectoriel $E$.*

**Définition 9**

*$(u_1,\dots,u_n)$ est une **famille libre**(ou **indépendante**) de $E$ si la seule combinaison linéaire d'éléments de $(u_1,\dots,u_n)$ donnant $0_E$ est la combinaison linéaire "triviale", c'est-à-dire "tous les coefficients sont nuls".*
*Si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i = 0$, alors $\alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout $i$.*
*On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une **famille liée** si elle n'est pas libre, c'est -à-dire si on peut trouver une com-*

*binaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls.*
*Cela revient à dire qu'on peut exprimer un des vecteurs de cette famille comme combinaison linéaire des autres.*

*Exemples :*

- la famille $(1, X-1, X^2-1)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$
- $(sin, cos)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$
- $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, mais elle n'est pas libre.

*Remarques :*

- $\boxed{\text{Pour une famille de deux vecteurs } (u,v) \text{, être liée signifie que } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires.}}$
- $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de $Vect(u_1, \dots, u_n)$ par définition de l'espace engendré
- Toute famille de vecteurs contenant $0_E$ est liée
- Toute sous famille("on enlève des vecteurs") d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille("on rajoute des vecteurs") d'une famille génératrice de $E$ est génératrice de $E$

**Définition 10**

*Une famille de vecteurs de $E$ est appelée* **base de** $E$ *si elle est à la fois libre et génératrice.*

*Exemples* : toute famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires est une base de $\mathbb{R}^2$.
Toute famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non coplanaires est une base de $\mathbb{R}^3$.

**Proposition 5 (*Bases canoniques*)**

- $(1; X; X^2; \dots; X^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*, appelée base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\.\\.\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\.\\.\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*, appelée base canonique de* $\mathbb{R}^n$.
- *On appelle* $E_{i,j}$ *la matrice de* $\mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui en position* $(i;j)$ *qui vaut 1.*
  $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *est une base de* $\mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$*, appelée base canonique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**Propriété 4 (*Décomposition dans une base*)**

*Soit* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *une base d'un espace vectoriel* $E$.
*Alors, tout vecteur de* $E$ *se décompose d'une unique manière comme combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathscr{B}$*, c'est-à-dire que pour tout* $u \in E$,
*il existe un unique n-uplet de scalaires* $(x_1, x_2 \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *tels que* $\boxed{u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n}$
$(x_1, x_2 \dots, x_n)$ *sont alors appelés* **coordonnées** *de* $u$ *dans la base* $\mathscr{B}$.

*Remarque* : on peut alors associer à $u$ une matrice(colonne) qui est la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$$

Quelque soit l'ordre dans lequel on met les vecteurs d'une base, leur famille reste toujours une base, mais ce n'est plus la même au sens strict, vu que l'on change l'ordre dans lequel on donne les coordonnées.

**Exercice** : Soit $P = X^3 - 3X + 2$ dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ : $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

- Ecrire la matrice de $P$ dans la base $\mathscr{B}$.
- Soit $\mathscr{B}'$ la famille $(1, X+1, X^2+X+1, X^3+X^2+X+1)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $E$
- Déterminer $Mat_{\mathscr{B}'}(P)$

**Proposition 6 (*Bases de supplémentaires*)**

*Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ qui sont supplémentaires.*
*Si $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de $F$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de $G$, alors la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de $E$.*

## 3.2 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 11**

*Un espace vectoriel $E$ est* **de dimension finie** *s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.*

*Remarque* : les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

**Théorème 1 (*Théorème de la base extraite*)**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de $E$.*
*Alors, il existe une base de $E$ composée de vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.*

*Remarque* : en conséquence, $\boxed{\text{tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.}}$

**Théorème 2 (*Théorème de la base incomplète*)**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de $E$.*
*Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ dont les $p$ premiers vecteurs sont exactement les vecteurs de $\mathscr{F}$ :*
$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$

**Théorème 3**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.*
*Toutes les bases de $E$ ont le même cardinal $n \in \mathbb{N}$, qu'on appelle* **dimension de E**, *souvent notée $dim(E)$.*

**Propriété 5**

*Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n$ et $p$ respectivement.*
*Alors, $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et* $\boxed{dim(E \times F) = n + p}$

*Remarque* : si $e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ et $f_1, \ldots, f_p)$ est une base de $F$, alors la famille $\big((e_1; 0_F), \ldots, (e_n; 0_F), (0_E; f_1), \ldots, (0_E; f_p)\big)$ est une base de $E \times F$

**Propriété 6 (*Dimension des espaces vectoriels de référence*)**

- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$
- $dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$
- $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ *et* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
- $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$ *et* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$

**Proposition 7**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.*
*Alors, $F$ est de dimension finie, et $dim(F) \leqslant n$.*
*De plus, si $dim(F) = n$, alors $F = E$.*

**Proposition 8**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*Alors,*

- *$F$ admet un sous-espace vectoriel supplémentaire dans $E$*
- *$F$ et $G$ sont supplémentaires si, et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$* **et** *$dim(F) + dim(G) = dim(E)$*

**Théorème 4 (*Formule de Grassman*)**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*
*Alors, $F + G$ est de dimension finie, et* $\boxed{dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)}$

## 3.3 Familles de vecteurs et dimension

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.

**Propriété 7 (*Sur le cardinal d'une famille*)**

*Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $E$.*
- *si $(u_1,\dots,u_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$*
- *si $p > n$, alors si $(u_1,\dots,u_p)$ est liée*
- *si $(u_1,\dots,u_p)$ est génératrice de $E$, alors $p \geqslant n$*
- *si $p < n$, alors $(u_1,\dots,u_p)$ n'est pas génératrice*

On dit que la dimension est le **cardinal maximal** d'une famille libre, et le **cardinal minimal** d'une famille génératrice.

**Propriété 8**

- *Une famille libre de cardinal $n$ de vecteurs de $E$ est une base de $E$.*
- *Une famille génératrice de cardinal $n$ de vecteurs de $E$ est une base de $E$.*

**Définition 12**

*Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $E$.*
*On appelle* **rang de** $(u_1,\dots,u_p)$ *la dimension de $Vect(u_1,\dots,u_p)$.*

On peut aussi définir le rang comme le cardinal maximal d'une sous-famille libre de $(u_1,\dots,u_p)$.

**Propriété 9 (*Sur le rang d'une famille*)**

*Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $E$.*
- *si $(u_1,\dots,u_p)$ est libre, alors son rang est $p$*
- *si $(u_1,\dots,u_p)$ est génératrice de $E$, alors son rang est $n$*

*Remarque* : le rang d'une famille $(e_1,\dots,e_p)$ de vecteurs de $E$(de dimension $n$) est le même que le rang de la matrice $M \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ remplie en colonnes par les coordonnées des vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ dans une base de $E$(de dimension $n$).
*Exemples* :

- dans $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, quel est le rang de la famille $(I_2; A; A^2)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $E = C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, quel est le rang de la famille $(f; g; h; i)$ avec
  $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}, h(x) = ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}; i(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$