Chapitre 10 : Développements limités

1 Négligeabilité

Définition 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a(avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).
On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a *si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$, et on dit que "$f$ **est un petit o de** g **au voisinage de** a*".*

Exemples

- Les croissances comparées nous donnent, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$:
  $x^a \underset{x \to \pm\infty}{=} o(e^x)$
  $ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^a)$
  $ln(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$
- Pour des entiers n et p avec $n < p$,
  $x^n \underset{x \to \pm\infty}{=} o(x^p)$
  mais $\boxed{x^p \underset{x \to 0}{=} o(x^n)}$

2 Développements limités au voisinage de 0

Il s'agit de chercher à comparer localement(pour x proche de 0) une fonction avec un polynôme, plus facile à étudier.

2.1 Définition

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0*.*
On dit que f admet **un développement limité d'ordre** n **au voisinage de** 0 *s'il existe une fonction polynomiale de degré n, notée p_n, telle que*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} p_n(x) + o(x^n)$$

$p_n(x)$ est appelé **partie régulière** *du développement limité de f*

Dans la suite, on notera $DL_n(0)$.

Remarques :

- Un développement limité à l'ordre 0 s'écrit $f(x) \underset{x \to 0}{=} b_0 + o(1)$.
  Cela signifie que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} b_0$
- Un développement limité à l'ordre 1 s'écrit $f(x) \underset{x \to 0}{=} b_0 + b_1 x + o(x)$.
  Cela signifie que f est dérivable en 0, que $f'(0) = b_1$ et que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est $y = b_0 + b_1 x$

Exemple : A l'aide de la somme d'une suite géométrique, on démontre que

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Propriété 1

Si f est une fonction paire, les coefficients d'ordre impair de tout DL(0) sont nuls.
Si f est une fonction impaire, les coefficients d'ordre pair de tout DL(0) sont nuls.

2.2 Opérations sur les développements limités

La morale de toutes ces propriétés est :"les calculs se font uniquement sur les parties régulières".

Propriété 2

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$:
$f(x) \underset{x\to 0}{=} p_n(x)+o(x^n)$ *et* $g(x) \underset{x\to 0}{=} q_n(x)+o(x^n)$.
Alors, pour tout λ, μ réels, la fonction $\lambda f+\mu g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda p_n(x)+\mu q_n(x)$

Propriété 3

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$:
$f(x) \underset{x\to 0}{=} p_n(x)+o(x^n)$ *et* $g(x) \underset{x\to 0}{=} q_n(x)+o(x^n)$.
Alors, la fonction $f\times g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $p_n(x)\times q_n(x)$ **tronqué au degré n**.

Propriété 4

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$:
$f(x) \underset{x\to 0}{=} p_n(x)+o(x^n)$ *et* $g(x) \underset{x\to 0}{=} q_n(x)+o(x^n)$ **et que** $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$.
Alors, la fonction composée $g\circ f$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $q_n\left[p_n(x)\right]$ **tronqué au degré n**.

Propriété 5

On suppose que f admet un $DL_n(0)$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} p_n(x)+o(x^n)$.
Alors, toute primitive F de f au voisinage de 0 admet un $DL_{n+1}(0)$ de partie régulière $F(0)+P_n(x)$ où P_n est une primitive de p_n.
C'est-à-dire que si $f(x) \underset{x\to 0}{=} b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+o(x^n)$, alors

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0)+b_0x+b_1\frac{x^2}{2}+b_2\frac{x^3}{3}+\cdots+b_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

Exemple Si $f(x)=ln(1-x)$, alors $f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}$, et en utilisant l'exemple vu plus haut, on obtient :

$$ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{1}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

De même, pour $g(x)=ln(1+x)$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et donc :

$$ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

2.3 Formule de Taylor-Young et applications

Notation : on note $f^{(k)}$ la dérivée $k-$ème de f. C'est-à-dire que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$...

Théorème 1 (*Formule de Taylor-Young*)

Soit f une fonction n fois dérivable en 0.

Alors, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)}$

ou encore $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}$

Cette formule permet de déterminer les $DL_n(0)$ de certaines fonctions usuelles, qui sont tous à connaître(au moins à l'ordre 3) :

. $\boxed{e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$

. $\boxed{cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$

. $\boxed{sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})}$

. pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)}$

. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$

. En primitivant $\frac{1}{1+x^2}$, on obtient : $\boxed{arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} o(x^{2n+1})}$

. En partant de $\frac{sin(x)}{cos(x)}$, on obtient : $\boxed{tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$

Il faut rajouter à ces DL ceux déjà explicités plus haut :

. $\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$

. $\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$

. $\boxed{ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})}$

. $\boxed{ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})}$

Définition 3

Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$ et telle que $f(0) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$(c'est-à-dire que le terme constant du DL est nul) : $f(x) \underset{x\to 0}{=} b_p x^p + b_{p+1}x^{p+1} + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors on appelle **forme normalisée** *du DL l'écriture $f(x) = b_p x^p \left(1 + \frac{b_{p+1}}{b_p}x^1 + \cdots + o(x^{n-p})\right)$*

On factorise par le terme le plus fort au voisinage de 0, c'est-à-dire la plus petite puissance.

Cela peut notamment être utile dans des calculs du type $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec les deux fonctions qui tendent vers 0(voir le 8 de l'exercice 1 du TD).

Exemple : si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x^2 - 3x^3 + 2x^4 + o(x^4)$, alors la forme normalisée est :

$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x^2 \left(1 - \frac{3}{2}x + x^2 + o(x^2)\right)$