# Chapitre 7 : Matrices et systèmes linéaires

## 1 Matrices

Dans toute cette partie, on considère $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

### 1.1 Définitions

**Définition 1**

*On appelle* **matrice réelle de dimensions** $(n;p)$ *tout "tableau" de nombres réels à n lignes et p colonnes.*
*L'ensemble des matrices de dimensions* $(n;p)$ *est noté* $\mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$.

*Remarques* :
- on peut définir de la même manière $\mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{C})$ pour des nombres complexes
- les nombres placés dans le tableau s'appellent les **coefficients** de la matrice
- les matrices sont en général notées par une lettre majuscule et les coefficients avec une lettre minuscule. Par exemple, on note $A$ une matrice et $a_{i;j}$ le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de $A$.
  Plus généralement, on peut écrire $\boxed{A = (a_{i;j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}}$, le premier indice $i$ désignant par convention les lignes et le 2e indice $j$ les colonnes.
- on peut assimiler un vecteur, par exemple $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ à une **matrice colonne** : $\overrightarrow{u} \in \mathscr{M}_{3;1}(\mathbb{R})$.
- on peut assimiler n'importe quel réel à une matrice de $\mathscr{M}_{1;1}(\mathbb{R})$.

*Exemples* :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

$A \in \mathscr{M}_{2;3}(\mathbb{R})$. On a par exemple $a_{1;2} = 2$, $a_{2;2} = 5$, $a_{2;3} = 1$

$B = \begin{pmatrix} -7 & \pi\\ \sqrt{3} & -2\\ 7 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. $B \in \mathscr{M}_{4;2}(\mathbb{R})$

$C = \begin{pmatrix} 4 & 1+i\\ -2i & -1\end{pmatrix}$. $C \in \mathscr{M}_{2;2}(\mathbb{C})$

*Exercice* :
Ecrire la matrice $A \in \mathscr{M}_{3;2}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)$, $a_{i;j} = 2i - j$

**Définition 2**

*Soit* $n, p \in \mathbb{N}^*$.
*On appelle* **matrice colonne** *une matrice de* $\mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$.
*On appelle* **matrice ligne** *une matrice de* $\mathscr{M}_{1;p}(\mathbb{R})$
*On appelle* **matrice carrée** *une matrice de* $\mathscr{M}_{n;n}(\mathbb{R})$. *On note alors simplement* $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

### 1.2 Opérations sur les matrices

**Définition 3 (*Somme*)**

*Soit* $A = (a_{i;j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{i;j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$.
*On définit* $\boxed{A+B}$ *comme étant la matrice dont les coefficients sont :* $(a_{i;j} + b_{i;j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

*Remarques* :
- il suffit d'ajouter deux-à-deux les coefficients de même position de chaque matrice
- on ne peut additionner des matrices que si elles ont les mêmes dimensions $n$ et $p$ !

**Définition 4 (*multiplication par un scalaire*)**

*Soit* $A = \left(a_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
*On définit* $\lambda \times A$ *comme étant la matrice dont les coefficients sont* $\left(\lambda a_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

*Remarques*
- — cela revient à multiplier tous les coefficients par le même nombre $\lambda$.
- — on peut définir $A - B$ comme étant $A + (-1) \times B$.

*Exemples* :

**Définition 5 (*transposée*)**

*Soit* $A = \left(a_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ *On appelle* **transposée de A** *la matrice notée* $\boxed{{}^tA}$ *dont les coefficients sont* $\left(a_{j;i}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$

*Remarque* : cela revient à inverser les lignes et les colonnes de $A$.
*Exemple* :

**Définition 6 (*produit ligne/colonne*)**

*Soit* $q \in \mathbb{N}^*$.
*Soit* $L = (l_k) \in \mathscr{M}_{1;q}(\mathbb{R})$ *une matrice ligne et* $C = (c_k) \in \mathscr{M}_{q;1}(\mathbb{R})$ *une matrice colonne.*
*Le produit de* $L$ *et* $C$ *est le* **nombre réel** $L \times C = \sum_{k=1}^{q} l_k \times c_k$

*Remarque* : le nombre de coefficients doit être le même pour la ligne et la colonne !

*Exemple* : pour $L = (1\ \ 3\ \ -2)$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, le produit $L \times C$ vaut $1 \times 2 + 3 \times (-1) + (-2) \times 4 = 2 - 3 - 8$

D'où $L \times C = -9$.

**Définition 7 (*produit matriciel*)**

*Soit $q \in \mathbb{N}^*$.*
*Soit $A = \left(a_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n;q}(\mathbb{R})$ et $B = \left(b_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q;p}(\mathbb{R})$.*
*Le produit $A\times B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient $(i;j)$ est le produit de la i-ème ligne de $A$ et de la j-ème colonne de $B$.*

*Si on appelle $C$ le produit $A\times B$, alors pour $i$ entre 1 et $n$ et $j$ entre 1 et $p$,* $\boxed{c_{i;j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i;k}\times b_{k;j}}$

*Remarques* :
- — Attention aux dimensions ! Le nombre de colonnes de $A$ doit être égal au nombre de lignes de $B$.
- — le produit $A\times B$ peut exister sans que le produit $B\times A$ existe
- — même si les deux produits existent, on n'a pas forcément $A\times B = B\times A$
  Par exemple, un calcul du type $(A+B)^2$ donne $A^2+AB+BA+B^2$ mais pas forcément $2AB$.
- — le cas idéal est celui de deux matrices carrées de même dimension.
  Par exemple, si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut définir les puissances de $A$ : $\boxed{A^k = A\times A\times\cdots\times A}$

*Exemple* :
Pour calculer un produit de matrice rapidement, on peut adopter la disposition suivante :

*Exercice* : calculer tous les produits possibles entre les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ ; $C = \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ ; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

## 1.3 Matrices particulières

**Définition 8**

*Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.*
*$A$ est dite* **triangulaire supérieure** *si $a_{i;j}=0$ pour $i>j$.*
*$A$ est dite* **triangulaire inférieure** *si $a_{i;j}=0$ pour $i<j$.*

*Exemple* :

**Définition 9**

*Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.*
*On dit que $A$ est une matrice* **diagonale** *si elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure, c'est-à-dire que $a_{i;j}=0$ pour $i\neq j$.*
*Les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale.*

**Définition 10**

*On appelle matrice* **identité d'ordre n**, *notée $I_n$, la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i;i} = 1$ pour tout $i$.*
*Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$.*

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Définition 11**

*Soit $A \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$.*
*$A$ est dite* **échelonnée** *en ligne si le nombre de zéros avant le premier coefficient non nul augmente strictement à chaque ligne(sauf s'il n'y a plus que des zéros).*

*Exemples* :

**Définition 12**

*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
*$A$ est dite* **inversible** *s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.*
*$B$ est alors appelée* **la matrice inverse de A** *et est notée $\boxed{A^{-1}}$.*
*L'ensemble des matrices inversibles de dimension $n$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.*

*Remarques* :

- si on a $AB = I_n$ alors forcément $BA = I_n$ (ce qui n'est pas une évidence)
- la notion d'inverse n'a aucun sens pour une matrice non carrée
- il n'est pas si facile de voir si une matrice est inversible. Exhiber la matrice $B$ qui vérifie $AB = I_n$ n'a rien d'évident. Plusieurs techniques seront vues cette année et l'an prochain.

# 2 Systèmes linéaires

## 2.1 Rappels : systèmes linéaires 2x2

Un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues est du type :
$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ inconnues et $(a;b;c;d;e;f)\in\mathbb{R}^6$ donnés.
On présente en général deux types de résolution de ce genre de système :
la méthode par **substitution** et la méthode par **combinaison**.
Cette dernière est à privilégier car elle est toujours aussi utile pour les systèmes avec plus d'inconnues.

**Exemple** : on achète 2 croissants et 4 pains au chocolat dans une boulangerie, et on paie au total $6,50$ euros.
Le lendemain, on achète 3 croissants et 1 pain au chocolat, et on paie au total 4 euros.
Cette situation se traduit par le système suivant :
$\begin{cases} 2x+4y=6,5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$

## 2.2 Matrice associée un système et algorithme du pivot

**Définition 13**

*Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ $p$ nombres réels inconnus.*
*On appelle* **combinaison linéaire** *de ces inconnues tout expression du type*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_p$$

*où $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont des réels connus.*

**Définition 14**

*Un système de $n$ équations à $p$ inconnues est dit* **linéaire** *si chaque équation est une égalité entre une combinaison linéaire des $p$ inconnues et une constante donnée.*

*Un tel système s'écrit alors sous la forme suivante :* $(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1;1}x_1 + a_{1;2}x_2 + \cdots + a_{1;p}x_p = b_1 \\ a_{2;1}x_1 + a_{2;2}x_2 + \cdots + a_{2;p}x_p = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n;1}x_1 + a_{n;2}x_2 + \cdots + a_{n;p}x_p = b_n \end{array}\right.$

**Définition 15**

*Pour un système similaire à celui de la définition précédente, on peut poser* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p;1}(\mathbb{R})$ *la "colonne des inconnues",* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p;1}(\mathbb{R})$ *la "colonne des seconds membres" et* $A = \left(a_{i;j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$
*On dit que $A$ est la matrice associée au système, qui est équivalent à l'égalité matricielle* $\boxed{AX = B}$.
*On peut considérer ça comme une seule équation dont l'inconnue est une matrice colonne.*

**Définition 16**

*Soit $(S)$ un système linéaire qu'on écrit $AX = Y$.*
*On appelle* **matrice augmentée** *associée à $(S)$ une matrice similaire à la matrice $A$ à laquelle on rajoute la colonne $B$ séparée des autres.*

*Exemple* :

Pour $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ inconnues, $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{array}\right.$

Ce système peut se réecrire $AX = B$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée associée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right)$

**Méthode essentielle : algorithme du Pivot de Gauss** Pour résoudre un système, on cherche à écrire des systèmes équivalents à celui-ci(c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) qui sont de plus en plus simples.

**Définition 17**

*On appelle* **opérations élémentaires** *sur les lignes d'un système linéaire(ou de sa matrice augmentée) les trois opérations suivantes :*

— *échanger deux lignes du système, que l'on peut traduire par* $\boxed{L_i \longleftrightarrow L_j}$

— *multiplier une ligne par un réel non nul, que l'on peut traduire par* $\boxed{L_i \longleftarrow \lambda L_i}$

— *ajouter un multiple d'une ligne à une autre, que l'on peut traduire par* $\boxed{L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j}$

**Proposition 1**

*Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'un système le transforme en un système équivalent.*

*Remarque* : on peut effectuer les mêmes opérations sur les colonnes, mais il faudrait alors garder en tête qu'échanger deux colonnes échange aussi la position des inconnues($y$ à la place de $x$ par exemple)

**Proposition 2 (*Algorithme du pivot de Gauss*)**

*Le but de la méthode est d'arriver à transformer un système linéaire quelconque en système échelonné, qui se résout ensuite facilement.*
*Ces étapes peuvent être réalisées sur le système directement ou bien sur la matrice augmentée.*

— *1re étape : choisir un pivot, c'est à dire une inconnue devant laquelle le coefficient est simple(1 ou -1 idéalement), et le placer en haut à gauche.*

— *2e étape : éliminer la 1re inconnue dans toutes les lignes à partir de la 2e*

— *Répéter les deux étapes précédentes sur le "sous-système" commençant à la ligne 2, qui comporte une inconnue de moins*

*Exemple* :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

## 2.3 Rang d'un système

A la fin de l'algorithme du pivot, on arrive à un système échelonné(ou une matrice échelonnée).

**Définition 18**

*On appelle* **rang** *d'un système le nombre d'équations non entièrement nulles du système final échelonné de l'algorithme du pivot.*
*On appelle* **rang** *d'une matrice le nombre de lignes non entièrement nulles de la matrice finale échelonnée de l'algorithme du pivot.*

*Remarques*

— le rang d'une matrice $A$ peut être noté $rg(A)$

— le rang peut être interprété comme le nombre d'équations "significatives" d'un système. Un système à 3 équations de rang 2 a “”une équation en trop", qui est une combinaison des deux autres.

— $rg(A) \leqslant n$ et $rg(A) \leqslant p$ : le rang est inférieur ou égal au nombre d'équations et au nombre d'inconnues

— pour la notion de rang, le second membre n'est pas pris en compte

*Exemple* : le système à 4 inconnues $(x; y; z; t)$ suivant $\begin{cases} 2x+4y+t=2 \\ z+t=1 \\ 4x+8y+2t=5 \\ 3z+3t=3 \\ x+2y-2t=1 \end{cases}$ est de rang 3.

En effet, l'algorithme du pivot peut donner la matrice associée suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le type de solution du système dépend fortement de son rang.

**Proposition 3**

*Un système linéaire peut avoir*

— *une unique solution*

— *une infinité de solutions*

— *aucune solution*

Décrivons précisément les différentes situations pour un système $(S)$ associé á une matrice $A$.

### 2.3.1 Si $rg(S) < n$

On se retrouve alors avec une ou plusieurs lignes nulles dans la matrice associée au système échelonné.
Les équations correspondantes sont appelées **équations de compatibilité** et sont de la forme $\boxed{0 = b_i}$

a Si un des $b_i$ n'est pas nul, l'équation correspondante est incompatible, et alors **le système n'a pas de solution**.

b Si elles sont toutes du type $\boxed{0 = 0}$ , alors le système est compatible, on peut "éliminer ces lignes" et on se ramène aux autres cas.

*Exemples* :

— exercice 5.2) du TD, c'est un système de rang 3 avec $n = 4$.
La 4e ligne à la fin de l'algorithme du pivot donne $0 = 6$ : on conclut qu'il n'y a pas de solution à ce système.

— exercice 8.1) du TD, c'est un système de rang 2 avec $n = 3$.
La 3e ligne à la fin de l'algorithme du pivot donne $0 = 0$ : on ne regarde que les deux premières lignes et on suit la démarche décrite par la suite.

### 2.3.2 Si $rg(S) < p$

Dans ce cas, il y a plus d'inconnues que d'équations significatives. On note $r$ le rang du système.
Il y a alors **une infinité de solutions**, et on peut exprimer $r$ variables en fonctions des $p-r$ restantes

**Définition 19**

*Soit $C_1;\dots;C_k$ des matrice colonnes(de $\mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$).*
*On appelle* **espace engendré** *par la famille $(C_1;\dots;C_k)$, noté $\boxed{Vect(C_1;\dots;C_k)}$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $(C_1;\dots;C_k)$, c'est-à-dire toute matrice colonne qui peut s'écrire $a_1C_1 + a_2C_2 + \cdots + a_kC_k$*

**Définition 20**

*Soit $A \in \mathscr{M}_{n;p}(\mathbb{R})$.*
*On appelle* **noyau de** *$A$, noté $\boxed{ker(A)}$, l'ensemble des solutions du système $AX = 0$, où $X \in \mathscr{M}_{p;1}(\mathbb{R})$ est une colonne inconnue et $0$ désigne ici la colonne nulle.*
*C'est un espace engendré par $\boxed{p - rg(A) \text{ colonnes}}$.*

*Remarques*

- la colonne nulle est toujours dans le noyau de $A$
- on peut voir le noyau comme la solution d'un système "homogène"(second membre nul)

*Exemple* : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Son noyau est donc un espace engendré par 2 colonnes(4-2).

**Proposition 4**

*Si un système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues admet une infinité de solutions(donc $rg(A) = n$), alors on peut exprimer l'ensemble des solutions sous la forme : “"solution particulière+solution homogène", c'est-à-dire une colonne ajoutée à n'importe quel élément du noyau de la matrice associée.*
*Cela revient à exprimer $n$ inconnues en fonction des $p-n$ autres, que l'on appelle alors* **paramètres**.

*Remarque* : le choix des paramètres est aléatoire, on peut exprimer $x$ et $y$ en fonction de $z$ et $t$, ou bien $y$ et $t$ en fonction de $x$ et $z$, etc...

*Exemple* : $\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ y + 3z - 2t = 4 \end{cases}$ La matrice associée au système est celle de l'exemple précédent.

### 2.3.3 Si $rg(S) = n = p$

Il y a dans ce cas autant d'inconnues que d'équations significatives.
Le système admet alors **une unique solution** et on a déjà vu de nombreux exemples de résolution.
La matrice associée au système est alors inversible.

**Proposition 5 (*Caractérisations de l'inversibilité*)**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
*$A$ est inversible si, et seulement si $rg(A) = n$.*
*$A$ est inversible si, et seulement si $ker(A)$ ne contient que la colonne nulle*

*Exemple* :

*Remarque* : $AX = B \iff A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B \iff X = A^{-1}B$

**Proposition 6**

*Dans le cas où $n = p = rg(A)$, le système "$AX = B$" admet une unique solution, qui est alors* $\boxed{X = A^{-1} \times B}$

**Méthode pour trouver l'inverse d'une matrice** : on peut résoudre un système du type $AX = Y$ avec $X$ et $Y$ deux colonnes inconnues, c'est-à-dire qu'au lieu d'exprimer $Y$ en fonction de $X$, on "retourne" le système pour exprimer $X$ en fonction de $Y$ et les coefficients obtenus sont ceux de $A^{-1}$.

*Exemple* : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$