Chapitre 3 : Géométrie dans le plan

Introduction :

Le plan signifie un espace à deux dimensions. Il y aura plus tard un chapitre de géométrie dans l'espace(à 3 dimensions), où une bonne partie des notions de ce chapitre seront réutilisées, mais aussi avec quelques spécificités.
C'est un chapitre où il faut particulièrement faire attention aux notations utilisées, qui changent à elles seules la signification de ce qu'on écrit : si A et B sont deux points,
AB désigne une longueur, (AB) une droite, $[AB]$ un segment, $\overrightarrow{AB}$ un vecteur...

1 Vecteurs dans le plan

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par une longueur, une direction et un sens. On le représente ainsi par un segment fléché.
On appelle **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$, le vecteur de longueur nulle, qui n'a donc pas de direction ni de sens.

Définition 1

On appelle **norme** *d'un vecteur* $\overrightarrow{u}$*, notée* $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$*, la longueur du segment associé à ce vecteur.*
On dit qu'un vecteur est **unitaire***, ou* **normé***, si* $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 1$

Remarque : la donnée(en tenant compte de l'ordre) de deux points A et B définit un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ qui correspond au segment AB avec le sens orienté de A vers B.

Définition 2

Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ *est égal au vecteur* $\overrightarrow{AB}$*, on dit que* $\overrightarrow{AB}$ *est* **un représentant de** $\overrightarrow{u}$

Remarque : un vecteur a une infinité de représentants. C'est le même vecteur indépendamment de l'endroit du plan où on le représente."

Définition 3

Soit $\overrightarrow{u}$ *un vecteur. On appelle* **vecteur opposé** *de* $\overrightarrow{u}$*, noté* $-\overrightarrow{u}$*, le vecteur de même longueur, même direction mais de sens contraire.*
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$*, alors* $-\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Définition 4

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs et* $k \in \mathbb{R}$.
On appelle **somme de** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$*, noté* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$*, le vecteur qui correspond à la msie bout à bout de ces deux vecteurs(voir dessin en classe).*
Si $k \geqslant 0$*, on note* $k\overrightarrow{u}$ *le vecteur de même direction et de même sens que* $\overrightarrow{u}$*, et de norme égale à* $k \times ||\overrightarrow{u}||$.
Si $k < 0$*, on note* $k\overrightarrow{u}$ *le vecteur opposé de* $|k|\overrightarrow{u}$.

Définition 5

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont* **colinéaires** *s'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque : visuellement, cela correspond à deux vecteurs représentés par des segments parallèles.

Proposition 1

Deux droites (AB) *et* (CD) *sont parallèles si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*
Trois points A, B, C *sont alignés si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Définition 6

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls.*
On appelle **mesure principale de l'angle** *entre* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*, notée* $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$*, la seule valeur de cet angle(en radian) qui se trouve dans l'intervalle* $[-\pi;\pi]$.

Remarque : pour mesurer les angles, il y a deux manières d'orienter le plan, c'est à dire de choisir un sens de rotation compté positivement. Par convention, on prendre le sens trigonométrique comme orientation.

Proposition 2

$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$ *si, et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Définition 7

On appelle **base du plan** *toute famille de deux vecteurs non colinéaires* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$ *(on dit aussi que les vecteurs* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *forment une* **famille libre** *de vecteurs)*
On appelle **base directe** *du plan une base* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$ *telle que* $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right) > 0$.
On appelle **base orthogonale** *du plan une base* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$ *telle que* $\left|\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$.
On appelle **base orthonormée** *du plan une base orthogonale telle que* $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$

Dans la grande majorité des situations, on munit le plan d'une base orthonormée directe.

Théorème 1

Soit $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$ *une base du plan.*
Alors, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ *se décompose d'une unique manière comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$, *c'est-à-dire qu'il existe un unique couple de réels* $(\alpha;\beta)$ *tels que* $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$.
α *et* β *sont appelés* **coordonnées de** $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $\mathscr{B}$.

Remarque : l'usage est de noter les coordonnées d'un vecteur en colonnes, et s'il y a plusieurs bases, de préciser en indice dans quelle base ces coordonnées sont prises. $\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}}$

Proposition 3

Dans une base du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}\alpha+\alpha'\\\beta+\beta'\end{pmatrix}$.
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, *le vecteur* $k\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}k\alpha\\k\beta\end{pmatrix}$.

Définition 8

On appelle **repère cartésien du plan** *l'association d'un point O, appelé* **origine** *du repère, et d'une base du plan* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$.
Les coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ *dans la base* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$ *:*
$M(x;y)$ *signifie que* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

Remarque : il existe d'autres types de coordonnées dans le plan, les plus fréquentes étant les coordonnées polaires.

Proposition 4

On se place dans un repère du plan $\left\{O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$.
Soient $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$ *deux points.*
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ *dans la base* $\left\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right\}$

2 Produit scalaire et déterminant

On donne d'abord une définition intrinsèque du produit scalaire, c'est-à-dire qui ne dépend pas du choix de base.

Définition 9

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** *le* <u>*nombre réel*</u>*, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par*

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=0 & si\ l'un\ des\ deux\ vecteurs\ est\ nul \\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\vec{u};\vec{v}) & sinon \end{cases}$$

Remarque : on peut interpréter géométriquement ce nombre à l'aide de la notion de projeté orthogonal(voir dessin en classe)

Définition 10

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** *si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.*

Remarque : cela correspond géométriquement à un angle droit entre ces deux vecteurs.

Propriété 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ *(on dit que le produit scalaire est symétrique)*
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ *(on dit que le produit scalaire est bilinéaire)*

Proposition 5 (*Expression du produit scalaire en base orthogonale*)

On exprime les coordonnées des vecteurs <u>*dans une base orthogonale.*</u>
Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$$

En particulier, la norme d'un vecteur est alors donnée par :

$$\boxed{\|u\|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Remarque : le produit scalaire peut servir à déterminer si deux droites sont perpendiculaires, ou à expliciter l'angle(non orienté) entre deux vecteurs.

En effet, d'après la définition, on a : $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, donc si on connait les coordonnées de deux vecteurs en base orthonogonale, on peut calculer le cosinus de l'angle entre ces vecteurs.

Proposition 6

Dans une base orthogonale $\left\{\vec{i};\vec{j}\right\}$, si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$ et $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$

Définition 11

On appelle **déterminant** *de deux vecteurs dans le plan le nombre réel, noté $[\vec{u};\vec{v}]$, ou $det(\vec{u};\vec{v})$, défini par*

$$\begin{cases} [\vec{u};\vec{v}]=0 & si\ l'un\ des\ deux\ vecteurs\ est\ nul \\ [\vec{u};\vec{v}]=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times sin(\vec{u};\vec{v}) & sinon \end{cases}$$

Remarque la valeur absolue du déterminant de deux vecteurs dans le plan correspond à l'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs(dessin vu en classe).

Proposition 7

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\left[\vec{u};\vec{v}\right]=0$.
De même, trois points du plan A,B,C sont alignés si, et seulement si $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=0$.

Proposition 8 (*Expression du déterminant en base orthonormée directe*)

On exprime les coordonnées des vecteurs dans une base orthonormée directe.
Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a

$$\boxed{\left[\vec{u};\vec{v}\right]=xy'-yx'}$$

On peut alors aussi noter le déterminant en base orthonormée directe $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$

Propriété 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
- . $\left[\vec{u};\vec{v}\right]=-\left[\vec{v};\vec{u}\right]$ *(on dit que le déterminant est antisymétrique)*
- . $\left[\vec{u};\vec{v}+\vec{w}\right]=\left[\vec{u};\vec{v}\right]+\left[\vec{u};\vec{w}\right]$
- . $\left[\vec{u}+\vec{v};\vec{w}\right]=\left[\vec{u};\vec{v}\right]+\left[\vec{v};\vec{w}\right]$ *(on dit que le déterminant est bilinéaire)*

Remarque : connaître le déterminant et le produit scalaire de deux vecteurs permet de connaître l'angle orienté entre ces deux vecteurs

3 Droites et cercles dans le plan

Pour définir une droite $(\mathscr{D})$ dans le plan, on peut donner
- Deux points distincts A et B appartenant à $(\mathscr{D})$.
- Un point A sur $(\mathscr{D})$, et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $(\mathscr{D})$
- Un point A sur $(\mathscr{D})$, et un vecteur normal $\vec{n}$ à $(\mathscr{D})$

Remarque : si $(\mathscr{D})=(AB)$ alors $\overrightarrow{AB}$ est directeur de $(\mathscr{D})$, et tout vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ est normal à $(\mathscr{D})$.

Définition 12

On appelle **équation de droite** *une ou plusieurs égalités vérifiée(s) par les coordonnées de tous les points de cette droite.*

Remarque : c'est en quelque sorte la "carte d'identité" de la droite.

3.1 Equation cartésienne d'une droite

Définition 13

La droite passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Proposition 9

On considère un repère du plan $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$ et une droite $(\mathscr{D})$.
Les coordonnées $(x;y)$ des points se trouvant sur $(\mathscr{D})$ vérifient une équation du type

$$ax+by+c=0,\ avec\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ fixés$$

C'est ce qu'on appelle une **équation cartésienne de** $(\mathscr{D})$.
Alors, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$

Remarque : une droite horizontale admet une équation cartésienne du type $''y = c''$.
Une droite verticale admet une équation cartésienne du type $''x = c''$.
Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite (AB), avec $A(1;4)$ et $B(-2;3)$.

3.2 Système d'équations paramétriques d'une droite

Proposition 10

On considère un repère du plan $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$.
Une droite $(\mathscr{D})$ *de vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ *est un ensemble de points* $(x;y)$ *qui vérifient :*

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & \alpha t + x_A \\ y = & \beta t + y_A \end{array}\right. \quad avec\ t \in \mathbb{R}\ et\ A(x_A;y_A) \in (\mathscr{D})$$

C'est ce qu'on appelle un **système d'équations paramétriques de** $(\mathscr{D})$*, et* t *est le paramètre.*

Remarque : on peut considérer que x et y dépendent d'un unique paramètre t(on donne x en fonction de t et y en fonction de t)
Exemples :
— Donner un système d'équations paramétriques de (AB) avec $A(-2;1)$ et $B(6;7)$

— On considère la droite $(\mathscr{D})$ définie par $\left\{\begin{array}{ll} x = & 4t+2 \\ y = & -t+1 \end{array}\right.$
Le point $C(10;-1)$ appartient-il à $(\mathscr{D})$?
Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$.

3.3 Distance d'un point à une droite

Définition 14

Soit M *un point du plan et* $(\mathscr{D})$ *une droite.*
On appelle **distance de M à** $(\mathscr{D})$*, notée* $d(M;(\mathscr{D}))$*, le minimum des longueurs* MN*, avec* $N \in (\mathscr{D})$.

Proposition 11

$\boxed{d(M;(\mathscr{D})) = MH}$*, où* H *est le projeté orthogonal de* M *sur* $(\mathscr{D})$*, c'est-à-dire que* $H \in (\mathscr{D})$ *et* $\overrightarrow{MH}$ *est normal à* $(\mathscr{D})$.

Exemple : déterminer la distance du point $A(2;-3)$ à la droite $(\mathscr{D})$:$''3x-2y+1=0''$

3.4 Equation de cercle dans le plan

On se place dans cette partie dans un repère orthonormé direct.

Définition 15

Soit $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ *un point du plan et* $r \in \mathbb{R}_+^*$.
Le **cercle** $\mathscr{C}$ **de centre** Ω**, de rayon** r *est l'ensemble des points* M *du plan tels que* $\boxed{\Omega M = r}$

Proposition 12

Un point $M(x;y)$ *appartenant au cercle* $\mathscr{C}$ *de centre* Ω*, de rayon* r *vérifie :*

$$(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = r^2$$

C'est ce qu'on appelle **une équation cartésienne du cercle** $\mathscr{C}$.

Il existe une autre définition d'un cercle, basé sur ses diamètres :

Définition 16

Soit A et B deux points du plan. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Exemple Donner une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(2;3)$ et $B(0;6)$.

4 Barycentres

4.1 Barycentre de deux points

Définition 17

On considère A et B deux points du plan, et α,β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
Il existe un unique point G tel que

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}}$$

G est alors appelé **barycentre des points A et B affectés des coefficients** α **et** β, *ou encore* **barycentre du système** $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

Remarque : si $\alpha=\beta$, on dit alors que G est **l'isobarycentre** de A et B.

Proposition 13

Soit G le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.
Alors, pour tout point M du plan, on a

$$\boxed{(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}}$$

En particulier, pour $M=A$, on obtient $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$, *et pour $M=B$,* $\boxed{\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}}$

Propriété 3

Soit G est le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

- *G est sur la droite (AB)*
- *si α et β ont le même signe, alors G est sur le segment $[AB]$.*
- *si $\alpha=\beta$, alors G est le milieu de $[AB]$.*
- *pour tout $k\in\mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ (on appelle ça* **l'homogénéité du barycentre***)*

Proposition 14

On se place maintenant dans un repère cartésien du plan.
On considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et α,β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
Le barycentre G du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ a pour coordonnées :

$$\boxed{x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}}\ et\ \boxed{y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}}$$

Cela revient à faire la moyenne des coordonnées de A et B, pondérée par les coefficients α et β.

Remarque : pour placer géométriquement un barycentre(avec simplement une règle et un compas), le théorème de Thalès peut être utile(voir dessins en classe)

4.2 Barycentre de trois points

Définition 18

On considère A, B et C trois points du plan, et α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$$

G est alors appelé **barycentre des points A,B et C affectés des coefficients** α, β **et** γ*, ou encore* **barycentre du système** $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

Remarque : si $\alpha = \beta = \gamma$, on dit alors que G est **l'isobarycentre** de A, B et C. Dans le cas de trois points non alignés, cela correspond au centre de gravité du triangle ABC.

Proposition 15

Soit G le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.
Alors, pour tout point M du plan, on a

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}}$$

Théorème 2 (*Barycentre partiel*)

Soit G le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.
Si $\alpha+\beta \neq 0$, on peut appeler H le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.
Alors, $\boxed{G \text{ est le barycentre de } \{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}}$

Remarque : toutes ces propriétés se généralisent facilement pour un barycentre de plus de trois points. *Exemples* : construction de barycentre "à la règle et au compas"(voir dessin en classe)

Proposition 16

On se place maintenant dans un repère cartésien du plan.
On considère les points $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B), C(x_C;y_C)$ et α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Le barycentre G du système $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ a pour coordonnées :

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}} \; et \; \boxed{y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

Cela revient à faire la moyenne des coordonnées de A, B et C, pondérée par les coefficients α, β et γ.