Exercices applications linéaires

Exercice 1 :
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telle que $f(1;0) = -3$ et $f(0;1) = 2$.
Calculer $f(-3;5)$ et $f(2;-1)$.

Exercice 2 :
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $\varphi_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$
2. $\varphi_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (y;x) \end{array}$
3. $\varphi_3 : \begin{array}{l} C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(2) \end{array}$
4. $\varphi_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) \mapsto (2x-3y+z; x-y-\frac{1}{3}z) \end{array}$
5. $\varphi_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto sin(3x+5y) \end{array}$
6. $\varphi_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto R_P \end{array}$ où R_P est le reste de la division euclidienne de P par X^2+1
7. $\varphi_7 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0;u_1;u_2) \end{array}$
8. $\varphi_8 : \begin{array}{l} C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right) \end{array}$

Exercice 3 :
Soient f et g les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par : $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = Re(z)$.
Montrer que f et g sont des applications linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais non linéaires pour $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 4 :
On considère l'application
$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) \mapsto (2x;2y;0) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. f est-elle injective ?
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = ker(f) \bigoplus Im(f)$

Exercice 5 :
Soit E le $\mathbb{R}$-ev des applications C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (*Remarque* : "une fonction C^2" signifie une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est continue).
On considère l'application
$D : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \mapsto f'' \end{array}$

1. Vérfier que D est linéaire
2. Déterminer $ker(D)$ et $Im(D)$.
3. A-t-on $E = ker(D) \bigoplus Im(D)$?

Exercice 6 :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, et $f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Donner l'image par f d'un vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ quelconque et déterminer $ker(f)$

Exercice 7 :

On considère l'application $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \tilde{P}(0)+\tilde{P}(1) \end{array}$ On admet que f est une application linéaire.

Déterminer une base de $Im(f)$ et de $ker(f)$.

Exercice 8 :

1. Soit E,F et G trois $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E;F)$ et $g \in \mathcal{L}(F;G)$.
   Démontrer l'équivalence suivante : $''g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E;G)} \iff Im(f) \subset ker(g)''$
2. On considère maintenant $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^2 - 3\varphi + 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$
   (a) Montrer que φ est un automorphisme de E
   (b) Montrer que $Im(\varphi - id_E) \subset ker(\varphi - 2id_E)$
   et que $Im(\varphi - 2id_E) \subset ker(\varphi - id_E)$
   (c) Montrer que $E = ker(\varphi - id_E) \bigoplus ker(\varphi - 2id_E)$

Exercice 9 :

Ecrire les matrices canoniquement associées aux applications linéaires suivantes :

— $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que
  $f(x;y) = (2x+5y; -3x+y)$
— $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ telle que
  $g(x;y;z) = (2x-y; 5x-3y+z)$
— $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que
  $h(x;y;z) = (x+z; -x+y; 2z)$

Exercice 10 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$
2. Expliciter une base de $Im(\varphi)$

Exercice 11 :

Pour les applications suivantes(on admettra qu'elles sont linéaires) :

— $u_1: \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$
— $u_2: \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$
— $u_3: \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$

1. Déterminer le noyau et l'image de chaque u_i.
2. Déterminer la matrice canoniquement associée à chaque u_i.

Exercice 12 :

On note $\varphi \in (\mathbb{R}^3[X])$ l'application telle que $\varphi(P) = P(X+1)$.

1. Ecrire A la matrice canoniquement associée à φ
2. Déterminer A^{-1}. Interpréter en terme d'application linéaire.

Exercice 13 :

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\varphi(x;y) = (x-2y; x+4y)$.

1. Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{C}$ $(M = Mat(\varphi)_{\mathscr{C}})$
2. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
3. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique, pour n entier quelconque(utiliser la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$).
   Remarque : ici φ^n signifie $\varphi \circ \varphi \circ \ldots \varphi$

Exercice 14 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

On considère de plus les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B} : (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et la formule(matricielle) de changement de base associée
3. En déduire la matrice A^n pour tout entier n.

Exercice 15 :

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}$ sa base canonique.

On considère l'application linéaire

$$\varphi: \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & aX^2 + (a+2c)X + a - b + 3c \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de φ dans $\mathscr{B}$.
2. Soit $P_1 = X^2 + X + 1, P_2 = X^2 + X, P_3 = X + 1$.
   Démontrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de E, qu'on notera $\mathscr{B}'$
3. Ecrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et déterminer son inverse.
4. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$.
5. φ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(\varphi) = 1$.

Démontrer qu'il existe t$\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$.