Exercices : compléments sur les fonctions

Exercice 1 :
On considère la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. f est-elle prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?(étudier séparément les deux valeurs interdites)

Exercice 2 :
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(x+1)}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$?

Exercice 3 :
Montrer que la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que son prolongement est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :
On considère la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f se prolonge sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ en une fonction de classe C^1.

Exercice 5 :
A l'aide de l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction $f : t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$,
déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Exercice 6 :
En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0;x]$ appliqué à une fonction f bien choisie, établir les inégalités suivantes :

1. pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant ln(1+x) \leqslant x$
2. pour toux $x > 0$, $sin(x) \leqslant x$
3. pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant arctan(x) \leqslant x$.

Exercice 8 :
On cherche à déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique solution de l'équation $cos(x) = x$.
Pour $u_0 \in [0;1]$ fixé, on définit $u_{n+1} = cos(u_n)$ pour tout entier n.

1. Montrer que l'équation "$cos(x) = x$" a une unique solution $\alpha \in]0;1[$(utiliser la fonction f définie par $f(x) = cos(x) - x$).
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$.
3. Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant sin(1)|u_n - \alpha|$
4. Démontrer que $|u_n - \alpha| \leqslant [sin(1)]^n$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. On pose $f(x) = \sqrt{2+x}$. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout entier n,
$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|$$
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 10 :
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\displaystyle\int_1^e ln(x)dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcos(x)dx$
3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sin(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{2x}dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 x^2 ln(x)dx$
6. $\displaystyle\int_3^4 ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)dx$
7. Trouver une primitive de f définie par $f(x) = e^x sin(x)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 11 :
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{(1-t)^3}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{ln(t)}{t}dt$
3. $\displaystyle\int_2^7 \frac{udu}{\sqrt{u^2+2}}$
4. $\displaystyle\int_3^4 \frac{u+1}{u^2+2u+7}du$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)e^{sin(x)}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$
7. $\displaystyle\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{-3t+4}}dt$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dt$, en posant $x = tan(t)$ et en remarquant que $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Exercice 12 :

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x cos(x)dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x sin(x)dx$.

1. Démontrer que $I = -J$.
2. Démontrer que $J = I + 1 + e^{\pi}$
3. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 13 :
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Exercice 14 :
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Exercice 15 :
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$. *Rappel : 0!=1 par convention*

1. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$(majorer I_n).
2. Montrer que $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$
3. En faisant apparaître une somme télescopique, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$

Exercice 16 :
On cherche à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{k}{n}\right) sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
On admet que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant sin(x) \leqslant x$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}sin\left(\frac{k}{n}\right)$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}sin\left(\frac{k}{n}\right)$
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{k}{n}\right) sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice essentiel :intégrales de Wallis
On pose pour tout entier n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que I_n est décroissante.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
4. Montrer que
$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(p!)^2 \times 2^{2p}}$$
et
$$I_{2p+1} = \frac{(p!)^2 \times 2^{2p}}{(2p+1)!}$$
5. Calculer un équivalent de $I_n I_{n+1}$ (faire les calculs pour n pair ou n impair)
6. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$ et en déduire un équivalent de I_n pour $n \to +\infty$.