Exercices chapitre 12

Exercice 1 :
On considère l'ensemble $E = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Déterminer, s'ils existent, son minimum, son maximum, sa borne supérieure, sa borne inférieure.

Exercice 2 :
Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles bornées ? Si oui, donner leur borne supérieure et/ou inférieure et s'ils existent leur maximum et leur minimum.

1. $A = \left\{ \dfrac{3}{m} + \dfrac{1}{n}; (m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$ (rappel : $\mathbb{N}^*$ représente les entiers naturels non nuls).
2. $B = \left\{ 4sin(x) - 2cos(y) - 2; (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $C = \{3cos(x) - ln(y) + 1; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$

Exercice 3 :
Donner un équivalent, puis la limite de $x \mapsto \dfrac{e^x + x^2}{e^{-x} + x^3}$ en $-\infty, 0$ et $+\infty$.

Exercice 4 : Déterminer des équivalents des expressions suivantes(et les limites correspondantes) :

1. $\dfrac{-3n^2+1}{4n-5}$
2. $\dfrac{n^3+2^n}{3^n}$
3. $\dfrac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$
4. $ln\left(\dfrac{n^2-2}{n^2+n}\right)$
5. $\sqrt{cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} - 1$
6. $nln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$
7. $\dfrac{ln(n^3+n}{ln(n^2+2^n}$
8. $\dfrac{2x^2+x}{3x^3+x^2-3x}$, pour $x \to 0$ et $x \to +\infty$
9. $ln(x+cos(x))$ pour $x \to 0$.
10. $\dfrac{x^3}{ln(1+x)}$, pour $x \to 0$.
11. $\dfrac{1-cos(3x)}{(ln(1+x))^2}$, pour $x \to 0$.
12. $ln\left(cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \times ln\left(sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, pour $x \to +\infty$
13. $Arccos\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ pour $x \to +\infty$
    (penser que $u \underset{0}{\sim} sin(u)$) .
14. $ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$, pour $x \to 0$.
15. $ln(x) \times ln(x-1)$ pour $x \to 1^+$

Exercice 5 :
On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f = x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
4. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 :
On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$
   (étudier la fonction donnant la relation de récurrence).
2. Etudier la monotonie de (u_n) (on pourra noter $\mathcal{P}(n)$:"$u_n \leqslant u_{n+1}$").
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
2. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Exercice 8 : suite de Fibonacci

1. On appelle nombre d'or, noté φ, l'unique solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   (a) Donner la valeur exacte de φ.
   (b) Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$
2. Les nombres de Fibonacci sont définis par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \quad = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

   On pose, pour tout entier n, $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
3. Vérifier que pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
   En déduire que **si la suite** u **converge**, alors elle converge vers le nombre d'or.
4. Démontrer que pour tout entier n,
   $u_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - u_n}{\varphi \times u_n}$.
   En déduire que $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi}|u_n - \varphi|$.
   remarque : il est clair que $u_n \geqslant 1$
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier n,

$$|u_n - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi^n}|1 - \varphi|$$

   Conclure.

Exercice 9 :

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$u_0 = a \in \mathbb{R}_+$ fixé et $u_{n+1} = \sqrt{u_n \mathrm{v}_n}$
et $\mathrm{v}_0 = b \in \mathbb{R}^+$ fixé et $\mathrm{v}_{n+1} = \frac{u_n + \mathrm{v}_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}_+^2$, $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.
2. En déduire que pour $n \leqslant 1$, on a $u_n \leqslant \mathrm{v}_n$.
3. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\geqslant 1}$.
4. Démontrer que $\mathrm{v}_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{v}_n - u_n}{2}$.
5. Démontrer par récurrence que $|\mathrm{v}_n - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|b - a|$.
6. En déduire que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 11 : démonstration du théorème de Césaro sur la "suite moyenne"

Soit (u_n) une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite (v_n)définie par

$$\mathrm{v}_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

est convergente de limite l.
indication : encadrer u_n *à* ϵ *près pour* n *assez grand , et "couper la somme en deux"*

Exercice 12 :

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $l < 1$, alors (u_n) tend vers 0.
2. Montrer que si $l > 1$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.