
Exercices chapitre 10

Exercice 1 : négligeabilité

1. Déterminer laquelle des deux fonctions est négligeable devant l'autre au voisinage de a :
 - (a) $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x$, $a = 0$ et $a = +\infty$
 - (b) $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{-x}$, $a = -\infty$ et $a = +\infty$
 - (c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$ et $a = +\infty$
2. Démontrer que $e^x + x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2x})$
3. Démontrer que $e^{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$

Exercice 2 :

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage 0 des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{1+x}$
2. $(1-x)^{\frac{1}{3}}$
3. $\frac{1}{4+x}$
4. $\sqrt{2-x}$
5. e^{2x}
6. $\cos(2x) - e^x$
7. $x^3 \ln(1+x)$
8. $\frac{x}{e^x - 1}$
9. $e^{\cos(x)}$
10. $\ln(1-x+x^2)$
11. $\frac{1+3x^2}{(1-x)^3}$
12. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 3 : Soit $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.
2. En déduire un $DL_3(0)$ de f .

Exercice 4 :

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\arccos(x)$
2. $DL_3(0)$ de $e^{-x} \sin(x)$
3. $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\ln(1+2x)}$
4. $DL_2(0)$ de $\ln(2+x+x^2)$

Exercice 5 :

Donner le premier terme non nul du développement limité en 0 des fonctions suivantes :

1. $\tan(x) - \sin(x)$
2. $2\sin(x) - \sin(2x) - x^3$
3. $\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$

4. $x \cos(\sqrt{x}) - \ln(1+x)$

5. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$

6. $\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$

Exercice 6 :

Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage du point a indiqué :

1. $\ln(1+x); a = 1$

2. $x^5 - 2x^3 + 4x; a = -1$

3. $\frac{1}{1-x}; a = -1$

4. $\tan(x); a = 2$

(rappel : $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$)

5. $x^x; a = -1$

6. $e^{\sin(x)}; a = \frac{\pi}{6}$

Exercice 7 :

À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin^2(bx)}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x)]^2}{e^x - e^{-x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2 - x^3 + 2x^4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Exercice 8 :

Donner le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de $\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \times e^{\frac{x}{x+1}}$.

Exercice 9 :

Donner un développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{2}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 10 :

1. (a) Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$.

(b) En déduire la tangente à \mathcal{C}_f en 0 et la position de \mathcal{C}_f par rapport à celle-ci.

2. Déterminer un développement limité en 0 de $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x + 2x^2}$ pour en déduire la tangente à \mathcal{C}_f en 0 et la position de \mathcal{C}_f par rapport à celle-ci.