

---

## Exercices chapitre 10

---

### Exercice 1 : négligeabilité

- Déterminer laquelle des deux fonctions est négligeable devant l'autre au voisinage de  $a$  :
  - $f(x) = x^3 + x^2$ ,  $g(x) = x$ ,  $a = 0$  et  $a = +\infty$
  - $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = e^{-x}$ ,  $a = -\infty$  et  $a = +\infty$
  - $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$  et  $a = +\infty$
- Démontrer que  $e^x + x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2x})$
- Démontrer que  $e^{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$

### Exercice 2 :

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage 0 des fonctions suivantes :

- $\sqrt{1+x}$
- $(1-x)^{\frac{1}{3}}$
- $\frac{1}{4+x}$
- $\sqrt{2-x}$
- $e^{2x}$
- $\cos(2x) - e^x$
- $x^3 \ln(1+x)$
- $\frac{x}{e^x - 1}$
- $e^{\cos(x)}$
- $\ln(1-x+x^2)$
- $\frac{1+3x^2}{(1-x)^3}$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Exercice 3 :** Soit  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ .

- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ .
- En déduire un  $DL_3(0)$  de  $f$ .

### Exercice 4 :

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $\operatorname{Arccos}(x)$
- $DL_3(0)$  de  $e^{-x} \sin(x)$
- $DL_2(0)$  de  $\sqrt{1+\ln(1+2x)}$
- $DL_2(0)$  de  $\ln(2+x+x^2)$

### Exercice 5 :

Donner le premier terme non nul du développement limité en 0 des fonctions suivantes :

- $\tan(x) - \sin(x)$
- $2\sin(x) - \sin(2x) - x^3$
- $\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$

4.  $x \cos(\sqrt{x}) - \ln(1+x)$
5.  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$
6.  $\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$

**Exercice 6 :**

Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage du point  $a$  indiqué :

1.  $\ln(1+x); a = 1$
2.  $x^5 - 2x^3 + 4x; a = -1$
3.  $\frac{1}{1-x}; a = -1$
4.  $\tan(x); a = 2$   
(rappel :  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ )
5.  $x^x; a = -1$
6.  $e^{\sin(x)}; a = \frac{\pi}{6}$

**Exercice 7 :**

Al'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}</math></li> <li>2. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin^2(bx)}</math> avec <math>a, b \in \mathbb{R}</math>.</li> <li>3. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x)]^2}{e^x - e^{-x}}</math></li> <li>4. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2 - x^3 + 2x^4}</math></li> <li>5. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}</math></li> <li>6. <math>\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}</math></li> <li>7. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>8. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x</math></li> <li>9. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}</math></li> <li>10. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}</math></li> <li>11. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}</math></li> <li>12. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}</math></li> <li>13. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}</math></li> <li>14. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)</math></li> </ol> |
|---|--|

**Exercice 8 :**

Donner le développement asymptotique à l'ordre 2 en  $+\infty$  de  $\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \times e^{\frac{x}{x+1}}$ .

**Exercice 9 :**

Donner un développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{2}$  de  $h(x) = \ln(\sin x)$ .

**Exercice 10 :**

1. (a) Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$ .  
(b) En déduire la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0 et la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à celle-ci.
2. Déterminer un développement limité en 0 de  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x + 2x^2}$  pour en déduire la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0 et la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à celle-ci.