Exercices chapitre 6

Exercice 1 :
Quelle sont les valeurs de a possibles pour que la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ admette un extremum local en $x = 1$?
Vérifier ensuite si cela est vraiment le cas.

Exercice 2 :
Réaliser une étude complète(sans étude d'asymptote) des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -2x^4 + 3x^2 - 5$
2. $f : x \mapsto ln(2e^x + 1)$
3. $f : x \mapsto ln(\mid ln(x) \mid)$
4. $f : x \mapsto (1 - x)e^x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 4x + 2}$
8. $f : x \mapsto e^{-x} sin(x)$
9. $f : x \mapsto \dfrac{1}{sin(x)}$
10. $f : x \mapsto sin(x)(1 - sin(x))$

Exercice 3 :

Réaliser une étude complète, incluant les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives, des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{3}{1 + e^{-x}}$ (on pourra démontrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{3}{2}$ est impaire)
2. $x + 2 + xe^x$
3. $\dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x + 2}$(on pourra démontrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x-2)+5$ est impaire)

Exercice 4 :

Montrer que dans les exemples suivants, la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à préciser.
Expliciter si possible la fonction réciproque et la dérivée de celle-ci.

1. $f(x) = 2x - 3, I = [-1; 4]$
2. $f(x) = x^3 + x + 1, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}, I = \mathbb{R}_+$
4. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{1 + cos(x)}, I =]-\pi; \pi[$
5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, I =]0; 1]$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $sin(4y) - sin(2y) = 0$
2. $cos(4x) + sin(4x) = 0$
3. $tan(2x) = tan(x)$

Exercice 6 :
Résoudre les équations suivantes dans le domaine approprié :

1. $arcctan(2x) + arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ ($Rappel : tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a) \times tan(b)}$)
2. $arcsin(x) = arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$
3. $arccos(x) = arcsin(2x)$
4. $arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = arctan(x)$

Exercice 7 :
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctan(x)}{x}$

Exercice 8 :
Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 :
On pose $f(x) = arccos(1 - 2x^2)$.

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Calculer la dérivée de f. En déduire une expression simplifiée de f.
4. Pour $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, calculer $f(sin(\varphi))$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
5. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 10 :
Etudier de la même manière qu'à l'exercice précédent la fonction $f : x \mapsto arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 11 :
On considère la fonction $f : x \mapsto arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f, ainsi que la parité de f.
2. Calculer la dérivée de f. En déduire une expressions simplifée de f sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $\varphi \in [0; \pi[$, calculer $f\left(tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
4. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 12 :
Etudier de la même manière qu'à l'exercice précédent la fonction $f : x \mapsto arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.