Exercices chapitre 5

Exercice 1 :
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1+i)^3$
2. $(2-i)(3+i)(4i+5)$
3. $\dfrac{5-4i}{9-2i}$
4. $\dfrac{3}{2+9i}$
5. $\left(\dfrac{5-3i}{1+i}\right)^2$
6. $\dfrac{-3+i}{(i-2)\overline{(6-5i)}}$

Exercice 2 :
Déterminer le réel a tel que le nombre complexe $z = \dfrac{1+ia}{2a+i(a^2-1)}$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 :
Déterminer l'ensemble des points du plan dont les affixes sont les nombres complexes z tels que

1. $|z+5| = |z-i|$
2. $|z+1+i| = 2$

(raisonnement géométrique)

Exercice 4 :
Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $2\sqrt{3} - 2i$
2. $(1+i)^3$
3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n(1-i)^{2-n}$

Exercice 5 :
On pose $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Calculer $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle et algébrique.
3. En déduire les valeurs de $cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6 :
On considère les complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = 1+3i$.

1. Mettre z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
2. Calculer le produit $z_1z_2z_3$ sous forme algébrique. Déterminer un argument de $z_1z_2z_3$.
3. En déduire l'égalité suivante :

$$arctan(1) + arctan(2) + arctan(3) = \pi$$

Exercice 7 :
A l'aide de la formule de Moivre, exprimer $sin(5\theta)$ en fonction de $sin(\theta)$.
En déduire la valeur exacte de $sin(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 8 :
Linéariser l'expression $cos(x)sin^3(x)$.

Exercice 9 :
A l'aide d'une formule de trigonométrie, déterminer la valeur de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
En déduire la valeur de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$$

Exercice 10 :
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $3+4i$
2. $1-i\sqrt{3}$
3. $7+24i$
4. $2-4i\sqrt{6}$
5. $-4i$
6. $9+40i$
7. $16-30i$

Exercice 11 :
Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

1. $2-2i$
2. i
3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 12 :
Déterminer les racines quatrièmes des nombres complexes suivants :

1. $8\sqrt{2}(1-i)$
2. $-119+120i$

Exercice 13 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^2+z+2=0$
2. $z^2+2(1+i)z+4i=0$
3. $z^2-6z+11=0$
4. $iz^2-2iz+i-2=0$
5. $\overline{z}=z^2$
6. $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

Exercice 14 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^3=-1$ et en déduire les solutions de
$$(z-1)^3+(z+2)^3=0$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5=-i$. Donner les résultats sous forme exponentielle et en déduire les solutions de
$$1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$$

Exercice 15 : Calcul de $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
A tout nombre complexe z, on associe le nombre $Z=1+z+z^2+z^3+z^4$.

1. Vérifier que pour $z\neq 1$, $Z=\dfrac{1-z^5}{1-z}$
2. On pose $z=e^{2i\frac{\pi}{5}}$.
Calculer alors Z et en déduire la valeur de $S=1+cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. Etablir que $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=4cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2$ et que $cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-2cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Conclure.