

1. DEFINITION D'UNE ACTION MECANIQUE

On appelle « action mécanique » toute cause susceptible de maintenir un corps au repos ou de créer un mouvement ou de déformer un corps.

On peut classer les actions mécaniques en deux catégories :

- Actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique, ...)
- Actions mécaniques de contact (surfactive, linéique, ponctuel)

Une action mécanique peut être considérée comme « intérieure » ou « extérieure » à un système.

2. MODELISATION LOCALE DES ACTIONS MECANQUES

Pour modéliser des actions mécaniques, on peut utiliser un champ de vecteur volumique, surfactive ou linéique. Pour les actions mécaniques ponctuelles, on utilise plutôt un vecteur.

2.1 ACTION MECANIQUE ASSOCIEE A UNE DENSITE VOLUMIQUE D'EFFORT

L'action mécanique élémentaire $d\vec{R}(M)$ s'appliquant au point M d'un solide est représentée par une densité volumique d'effort $\vec{f}(M)$ associée à un élément de volume dV au voisinage de M .

$$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{R}(M)}{dV} \quad (N \cdot m^{-3})$$

2.1.1 Pesanteur

Lorsqu'un objet est abandonné à une certaine hauteur du sol, il se met en mouvement sous l'effet de la pesanteur. La pesanteur est donc une action mécanique.

Dans ce cas, la densité volumique d'effort de la pesanteur sur le solide est $\vec{f}(M) = \rho(M) \cdot \vec{g}$ avec :

- $\rho(M)$: masse volumique au point M en $kg \cdot m^{-3}$
- \vec{g} : accélération de la pesanteur (considérée comme constante sur l'ensemble du solide) en $m \cdot s^{-2}$

$$d\vec{R}(M) = \rho(M) \cdot \vec{g} \cdot dV = \vec{g} \cdot dm$$

- $dm = \rho(M) \cdot dV$: masse élémentaire au voisinage du point M en kg

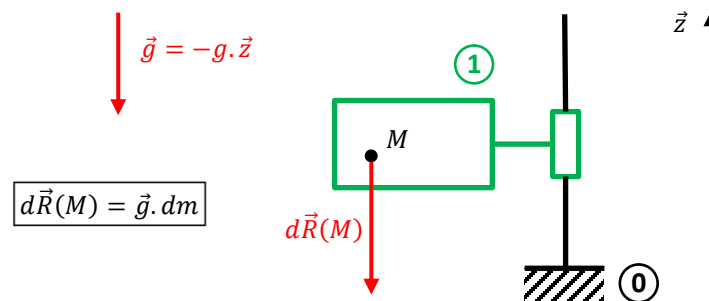


Figure 1 – Action mécanique élémentaire de la pesanteur sur un solide

2.2 ACTION MECANIQUE ASSOCIEE A UNE DENSITE SURFACIQUE D'EFFORT

L'action mécanique élémentaire $d\vec{R}(M)$ s'appliquant au point M d'un solide est représentée par une densité surfacique d'effort $\vec{f}(M)$ associée à un élément de surface dS au voisinage de M .

$$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{R}(M)}{dS} \quad (N \cdot m^{-2})$$

2.2.1 Fluide agissant sur une paroi

Dans le cas d'un vérin, lorsque le fluide entre dans la chambre, le piston se déplace. L'action du fluide sur le piston est donc une action mécanique.

Dans ce cas, la densité surfacique d'effort du fluide sur la paroi est $\vec{f}(M) = -p(M) \cdot \vec{n}$ avec :

- $p(M)$: pression au point M de la surface de contact entre le fluide et le solide en $N \cdot m^{-2} \equiv Pa$
- \vec{n} : normale extérieure au solide au point M

$$d\vec{R}(M) = -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

- dS : surface élémentaire au voisinage du point M en m^2

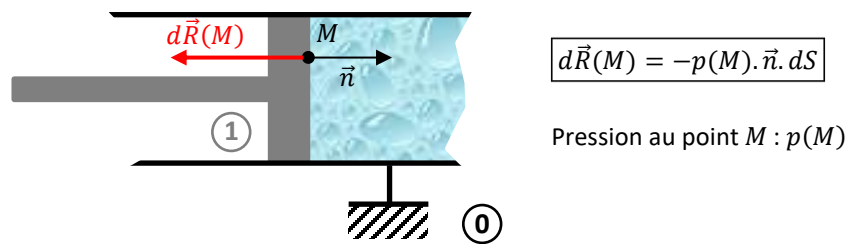


Figure 2 – Action mécanique élémentaire d'un fluide sur un solide

2.3 ACTION MECANIQUE ASSOCIEE A UNE DENSITE LINEIQUE D'EFFORT

L'action mécanique élémentaire $d\vec{R}(M)$ s'appliquant au point M d'un solide est représentée par une densité linéique d'effort $\vec{f}(M)$ associée à un élément de longueur dx au voisinage de M .

$$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{R}(M)}{dx} \quad (N \cdot m^{-1})$$

2.3.1 Engrenage

Au niveau d'un engrenage à denture cylindrique droite, le contact peut être considéré comme linéaire. Sous l'effet du pignon, la roue se met à tourner. L'action du pignon sur la roue est donc une action mécanique.

Dans ce cas, la densité linéique d'effort du pignon sur la roue est $\vec{f}(M) = -\lambda(M) \cdot \vec{n}$ avec :

- $\lambda(M)$: pression linéique au point M de la ligne de contact entre le pignon et la roue en $N \cdot m^{-1}$
- \vec{n} : normale extérieure à la roue au point M

$$d\vec{F}(M) = -\lambda(M) \cdot \vec{n} \cdot dx$$

- dx : longueur élémentaire au voisinage du point M en m

Exemple d'une poutre chargée par une densité linéique d'effort :

Une poutre encastree dans le sol **0** subit de la part d'un chargement une densité linéique d'effort $\lambda(M)$.

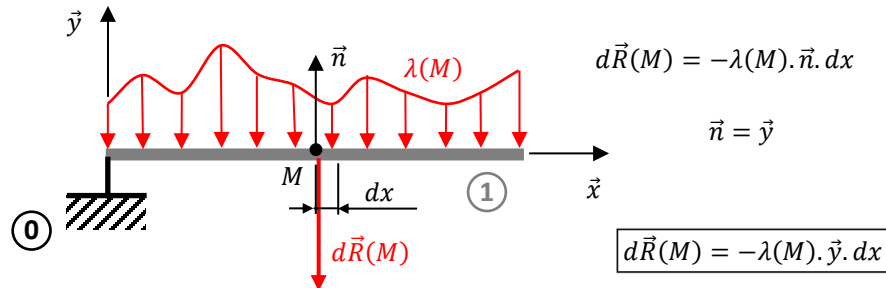
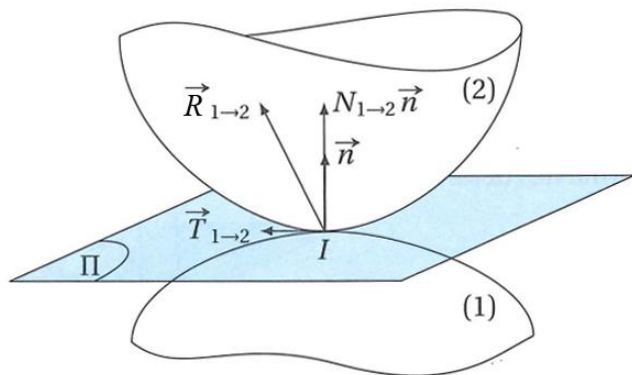


Figure 3 - Action mécanique élémentaire d'une densité linéique de charge

2.4 ACTION MECANIQUE PONCTUELLE

Le contact entre deux solides n'est jamais « ponctuel ». Il existe toujours une zone de contact de surface non nulle notamment à cause des déformations locales subies par les deux solides en contact. Cependant la surface de contact peut avoir des dimensions très petites devant les dimensions du solide, si bien qu'on peut alors considérer le contact comme ponctuel.



$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$: résultante de **1** sur **2**

$N_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}$: composante normale de $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$: composante tangentielle de $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

π : plan tangent commun en I entre **1** et **2**

\vec{n} : normale extérieure à **1** au plan tangent π

Figure 4 - Paramétrage du contact ponctuel entre deux solides indéformables

2.4.1 Contact sans frottement

Lorsque le contact en I est considéré sans frottement, on a les relations suivantes :

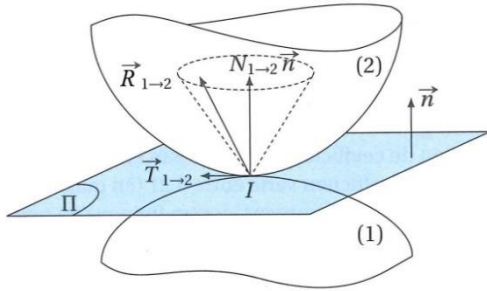
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est colinéaire à \vec{n} (pas de frottement)
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ selon \vec{n} (condition de contact unilatéral)
- $\vec{V}(I, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$ (condition de persistance du contact)

2.4.2 Contact avec frottement

Modèle de Coulomb

Il faut distinguer deux cas selon que les pièces en contact ponctuel ont ou non pas de mouvement relatif.

Cas de l'adhérence en I : $\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0}$

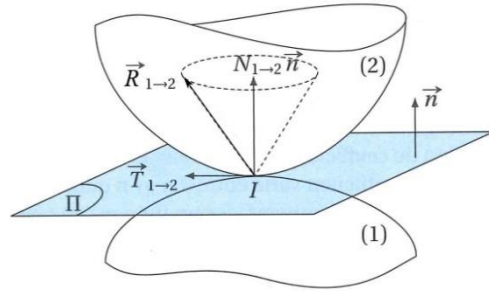


$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ se trouve dans le cône d'adhérence.

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

On ne connaît pas la direction de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$.

Cas du glissement en I : $\vec{V}(I, 2/1) \neq \vec{0}$



$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ se trouve sur le cône de frottement.

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

La direction de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est donnée par :

- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}(I, 2/1) = \vec{0}$
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}(I, 2/1) < 0$

$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est de même direction et de sens opposé à $\vec{V}(I, 2/1)$.

Figure 5 - Représentation graphique plane du cône de frottement

Le cône de frottement est défini par son demi-angle au sommet : φ .

On définit le coefficient de frottement f par $f = \tan \varphi$.

Le coefficient de frottement dépend essentiellement de la nature des matériaux en contact.

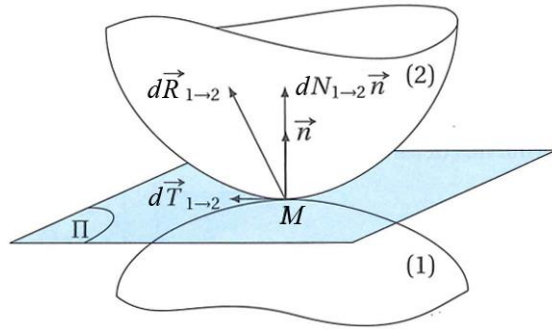
Matériaux en contact	Coefficients de frottement
Acier/acier (sec)	0,2
Acier/acier (lubrifié)	0,1
Bronze/bronze ou laiton (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (lubrifié)	0,08
Acier/téflon	0,05
Lubrification hydrodynamique	0,005
Pneu/bitume sec	0,8
Pneu/bitume humide	0,6

Figure 6 - Valeurs usuelles du coefficient de frottement

2.4.3 Surface ou ligne vue comme une infinité de points

Toute surface ou ligne peut être vue comme une infinité de points. On peut donc ramener l'étude d'une action mécanique surfacique ou linéique avec frottement à l'étude d'une « somme » d'action mécanique locale avec frottement. On définit alors en chaque point M de la surface ou de la ligne, une action élémentaire $d\vec{R}$.

Dans ce cas, les notations utilisées sur la figure 1 doivent être adaptées comme l'indique la figure 4 ci-dessous :



(b) Plan tangent et normale associée au contact ponctuel.

$d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$: action élémentaire en M de **1** sur **2**

$dN_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}$: composante normale de $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

$d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$: composante tangentielle de $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

π : plan tangent commun en I entre **1** et **2**

\vec{n} : normale extérieure à **1** au plan tangent π

Figure 7 - Paramétrage du contact surfacique ou linéique entre deux solides indéformables

Arc-boutement

Le phénomène d'arc-boutement est très utilisé en mécanique. Ce phénomène est rendu possible par la présence de frottement dans certaines liaisons du mécanisme. Il permet, suivant les configurations, d'assurer ou d'éviter le déplacement des pièces même sous de chargements importants. De nombreux dispositifs sont basés et fonctionnent grâce aux propriétés de l'arc-boutement (échelle, serre-joint, roue libre, cric d'automobile, ...). Par contre, sur certains mécanismes, il est nuisible (coulisseau, tiroir, ...).

3. MODELISATION GLOBALE DES ACTIONS MECANIQUES

3.1 PASSAGE LOCAL-GLOBAL

La connaissance locale des actions mécaniques est nécessaire pour déterminer les contraintes dans le matériau et donc pour savoir si le matériau pourra résister aux sollicitations qu'il subit.

Lorsque la connaissance locale des actions mécaniques n'est pas nécessaire, on préfère remplacer le modèle local par un modèle global beaucoup plus simple à manipuler.

3.2 TORSEUR D'ACTION MECANIQUE

On montre que toute action mécanique d'un solide i sur le solide j peut être entièrement caractérisée par un torseur appelé « torseur d'action mécanique » :

$$\{\mathcal{T}(i \rightarrow j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{M}(A, i \rightarrow j) \end{array} \right\}_A$$

On appelle :

- $\vec{R}(i \rightarrow j)$: résultante de l'action mécanique de i sur j
- $\vec{M}(A, i \rightarrow j)$: moment résultant au point A de l'action mécanique de i sur j

On peut exprimer la résultante et le moment résultant à partir de la vision locale grâce à :

$$\begin{aligned}\vec{R}(i \rightarrow j) &= \int d\vec{R}(M) \\ \vec{M}(A, i \rightarrow j) &= \int d\vec{M}(A, i \rightarrow j) = \int \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{R}(M)\end{aligned}$$

Comme pour tout torseur, on peut transporter le torseur d'un point A en un point B :

$$\vec{M}(B, i \rightarrow j) = \vec{M}(A, i \rightarrow j) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(i \rightarrow j)$$

3.2.1 Cas de la pesanteur

On recherche le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur un solide **1**.

$$\{\mathcal{T}(pes \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(pes \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, pes \rightarrow 1) \end{array} \right\}_A$$

Comme

$$\begin{aligned}d\vec{R}(M) &= \rho(M) \cdot \vec{g} \cdot dV = \vec{g} \cdot dm \\ \vec{R}(pes \rightarrow 1) &= \int_{M \in 1} \rho(M) \cdot \vec{g} \cdot dV = \int_{M \in 1} \vec{g} \cdot dm = \vec{g} \cdot \int_{M \in 1} dm = m \cdot \vec{g}\end{aligned}$$

Remarque : m désigne la masse du solide **1**.

$$\vec{M}(A, pes \rightarrow 1) = \int_{M \in 1} d\vec{M}(A, pes \rightarrow 1)$$

Or, si on transporte le moment élémentaire :

$$d\vec{M}(A, pes \rightarrow 1) = \underbrace{d\vec{M}(M, pes \rightarrow 1)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{R}(M)$$

Donc :

$$\vec{M}(A, pes \rightarrow 1) = \int_{M \in 1} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{g} \cdot dm = \int_{M \in 1} (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \vec{g} \cdot dm$$

Remarque : G désigne le centre d'inertie du solide **1**.

$$\vec{M}(A, pes \rightarrow 1) = \int_{M \in 1} \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \cdot dm + \int_{M \in 1} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{g} \cdot dm = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \cdot \int_{M \in 1} dm + \left(\int_{M \in 1} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right) \wedge \vec{g}$$

Comme G est le centre d'inertie du solide **1**, on sait par définition que :

$$\int_{M \in 1} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0}$$

On obtient alors :

$$\vec{M}(A, pes \rightarrow 1) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \cdot m$$

Finalement :

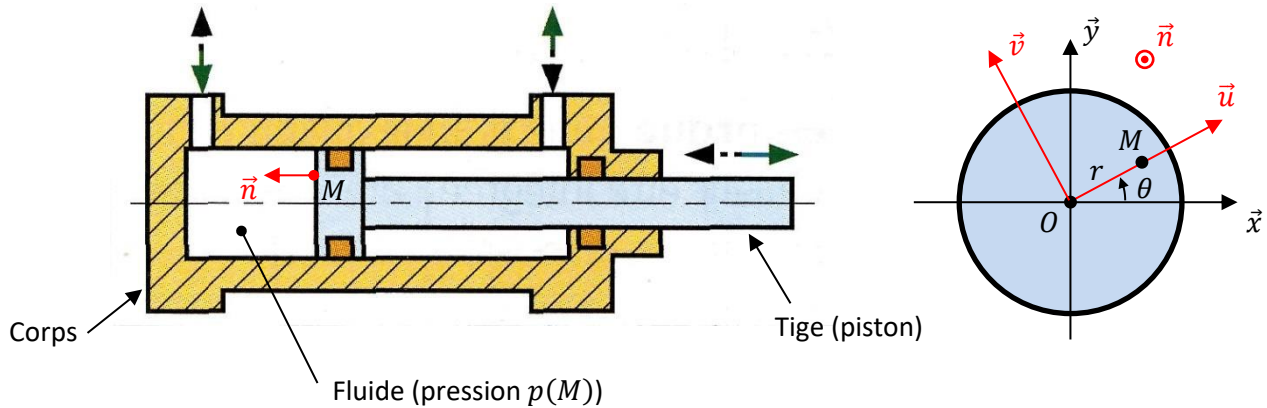
$$\{\mathcal{T}(pes \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(pes \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, pes \rightarrow 1) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{g} \\ \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \vec{g} \end{array} \right\}_A$$

Si on exprime ce même torseur en G , centre d'inertie du solide 1 :

$$\{\mathcal{T}(pes \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(pes \rightarrow 1) \\ \vec{M}(G, pes \rightarrow 1) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

3.2.2 Cas d'un fluide sur une paroi

On considère un vérin hydraulique. On cherche à déterminer le torseur d'action mécanique du fluide situé à l'arrière du piston sur le piston : $\{\mathcal{T}(fluide : corps \rightarrow piston)\}$



L'action mécanique est du type « locale surfacique ».

$$d\vec{R}(M) = -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\vec{R}(fluide : corps \rightarrow piston) = \int_{M \in S} d\vec{R}(M) = \int_{M \in S} -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = -p \cdot \vec{n} \cdot \int_{M \in S} dS = -p \cdot \vec{n} \cdot S$$

Remarque :

- S désigne la surface de contact entre le fluide et le piston
- La pression p est considérée comme constante

$$\vec{M}(O, fluide : corps \rightarrow piston) = \int_{M \in S} d\vec{M}(O, fluide : corps \rightarrow piston)$$

Or, si on transporte le moment élémentaire :

$$d\vec{M}(O, fluide : corps \rightarrow piston) = \underbrace{d\vec{M}(M, fluide : corps \rightarrow piston)}_{=\vec{0}} + \vec{OM} \wedge d\vec{R}(M)$$

Donc :

$$\vec{M}(O, fluide : corps \rightarrow piston) = \int_{M \in S} \vec{OM} \wedge -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = -p \cdot \int_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{n} \cdot dS$$

D'après le paramétrage : $\vec{OM} = r \cdot \vec{u}$

Donc :

$$\vec{M}(O, fluide : corps \rightarrow piston) = -p \cdot \int_{M \in S} r \cdot \vec{u} \wedge \vec{n} \cdot dS = p \cdot \int_{M \in S} r \cdot \vec{v} \cdot dS$$

D'après le paramétrage :

$$dS = r \cdot d\theta \cdot dr \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\sin \theta \cdot \vec{x} + \cos \theta \cdot \vec{y}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, \text{fluide} : \text{corps} \rightarrow \text{piston}) &= p \cdot \iint r^2 \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{x} + \cos \theta \cdot \vec{y}) \cdot dr \cdot d\theta \\ &= -p \cdot \vec{x} \cdot \iint r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta + p \cdot \vec{y} \cdot \iint r^2 \cdot \cos \theta \cdot dr \cdot d\theta \\ &= -p \cdot \vec{x} \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta + p \cdot \vec{y} \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot d\theta \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\{\mathcal{T}(\text{fluide} : \text{corps} \rightarrow \text{piston})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{fluide} : \text{corps} \rightarrow \text{piston}) \\ \vec{M}(O, \text{fluide} : \text{corps} \rightarrow \text{piston}) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Remarque importante sur la notation :

L'action mécanique de $i \rightarrow j$ impose que i et j soient des solides (sauf pour la pesanteur) !

Le fluide n'étant pas un solide, il faut éviter d'écrire : $\text{fluide} \rightarrow \text{piston}$.

C'est parce que, d'un côté, le fluide s'appuie sur les parois du corps du vérin, que, de l'autre côté, le fluide peut agir sur le piston pour le déplacer.

La notation $\text{fluide} : \text{corps} \rightarrow \text{piston}$ est donc préférable.

3.2.3 Cas des engrenages à denture cylindrique droite

Dans le cas où l'on considère que le contact est ponctuel, on peut définir le torseur d'action mécanique d'une roue sur un pignon au niveau du point de contact entre les deux dents.

Il est nécessaire de suivre une méthode...

(Voir cas d'application dans le cours sur le Principe Fondamental de la Statique).

3.2.4 Cas des liaisons normalisées

Une liaison est une architecture matérielle ou un composant permettant de guider un mouvement relatif ou de transmettre un effort entre deux solides. Elle peut être réalisée par des surfaces particulières en contact (plan-plan, cylindre-plan, ...) ou par des composants particuliers (roulements, paliers, ...). Dans le cas d'un modèle de liaisons parfaites (frottement et jeu nuls), on peut associer un torseur d'action mécanique à chaque liaison.

Exemple : liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) entre **1** et **2**

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Exemple : liaison rotule de centre B entre **1** et **2**

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(B, 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} X_B \cdot \vec{x} + Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le tableau suivant donne les torseurs d'actions mécaniques de toutes les liaisons normalisées (liaisons parfaites).

Nom	point d'application	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur des AM $\{T(1 \rightarrow 2)\}$
Encastrement	tout point de l'espace	0			$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x}) et de pas p	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} X_{12} & -hX_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$ avec $h = \pm \frac{p}{2\pi}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Appui plan de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Linéique annulaire en A de direction \vec{x}	au centre de la liaison	4			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_R$
Linéique rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x}, \vec{y})	4			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_R$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de la normale au contact	5			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

3.2.5 Cas d'un champ électromagnétique – Moteur

Dans le cas d'un moteur dont le rotor est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) avec son stator, l'action mécanique dû au Champ ElectroMagnétique dans l'entrefer est modélisable par le torseur :

$$\{T(CEM : stator \rightarrow rotor)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(CEM : stator \rightarrow rotor) \\ \vec{M}(A, CEM : stator \rightarrow rotor) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

Remarque : C_m désigne le couple moteur en $N \cdot m$.

3.2.6 Cas d'un ressort

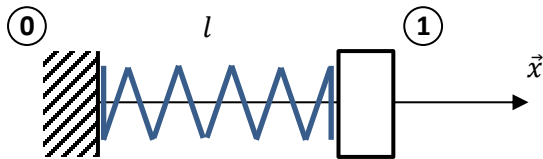
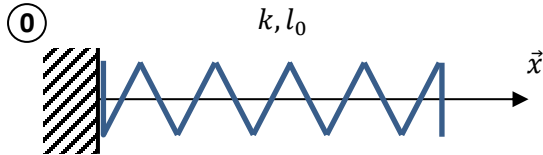


Dans le cas d'un ressort de traction-compression placé entre un solide **1** et un solide **2** selon l'axe (A, \vec{x}) , l'action mécanique de **1** sur **2** est modélisable par le torseur :

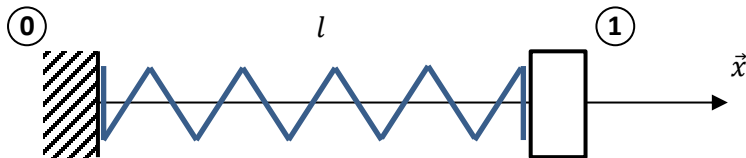
$$\{\mathcal{T}(\text{ressort} : 1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{ressort} : 1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, \text{ressort} : 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Remarque :

- k désigne le coefficient de raideur du ressort en $N \cdot m^{-1}$
- l_0 désigne la longueur à vide en m
- l désigne la longueur instantanée en m



$$\vec{R}(\text{Res: } 0 \rightarrow 1) = \underbrace{F_r}_{>0} \cdot \vec{x} = -k \cdot \underbrace{(l - l_0)}_{<0} \cdot \vec{x}$$



$$\vec{R}(\text{Res: } 0 \rightarrow 1) = -\underbrace{F_r}_{>0} \cdot \vec{x} = -k \cdot \underbrace{(l - l_0)}_{>0} \cdot \vec{x}$$



Dans le cas d'un ressort de torsion placé entre un solide **1** et un solide **2** autour de l'axe (A, \vec{x}) , l'action mécanique de **1** sur **2** est modélisable par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{ressort} : 1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{ressort} : 1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, \text{ressort} : 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C \cdot (\theta - \theta_0) \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_A$$

Remarque :

- C désigne le coefficient de raideur du ressort en $N \cdot m \cdot rad^{-1}$
- θ_0 désigne l'angle à vide en rad
- θ désigne l'angle instantanée en rad

4. CAS DE LA MODELISATION PLANE DES ACTIONS MECANQUES

Lorsque les conditions de chargement le permettent (symétrie de chargement + symétrie matérielle du mécanisme), on peut remplacer un problème initialement spatial par un problème plan.

Les six composantes des torseurs d'action mécanique ne sont plus utiles. Seules trois composantes sont nécessaires pour décrire l'action mécanique.

Exemple : liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) entre 1 et 2 dans le cas d'un problème plan (A, \vec{x}, \vec{y})

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + - \cdot \vec{z} \\ - \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \\ Y_A \\ - \\ N_A \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En effet, les efforts sont forcément dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) et les moments sont forcément selon la perpendiculaire au plan (A, \vec{x}, \vec{y}) c'est-à-dire selon \vec{z} .

5. MODELISATION D'UNE ACTION MECANIQUE SUR UN GRAPHE D'ISOLEMENT

Lors de la modélisation d'un problème en vue de sa résolution, il est essentiel de bien compléter le graphe de liaisons avec les actions mécaniques. Le nouveau graphe obtenu est alors appelé « graphe d'isolement ».

Exemple : Treuil

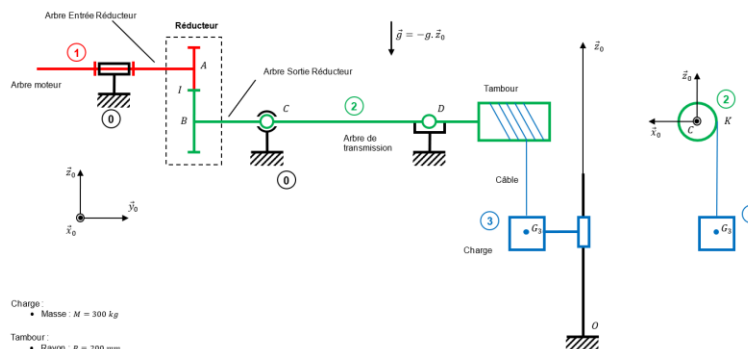


Figure 8 - Modèle cinématique du treuil

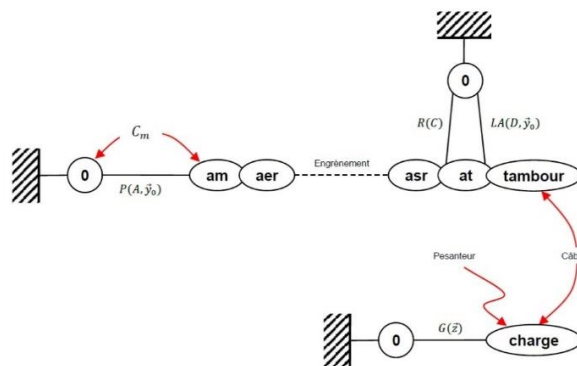
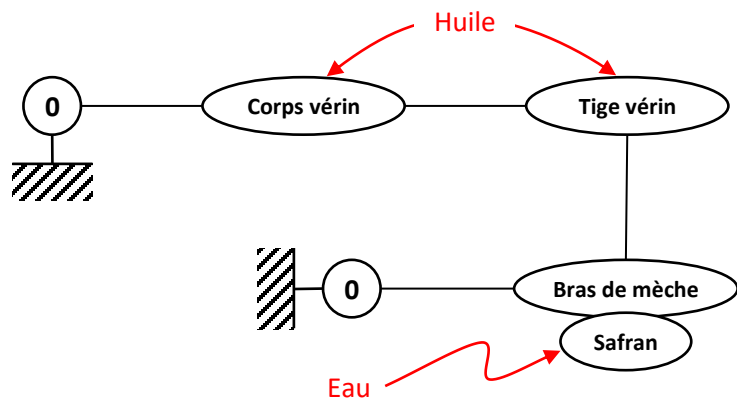
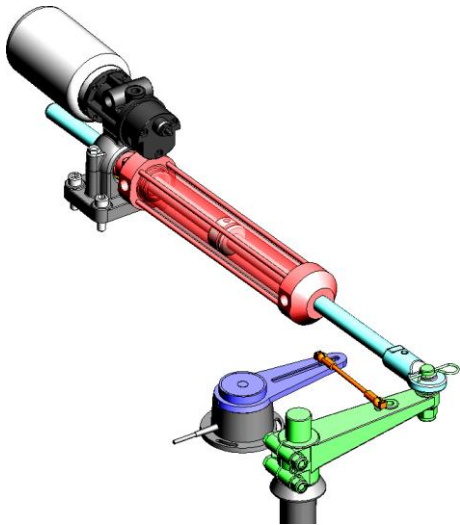


Figure 9 - Graphe d'isolement du treuil

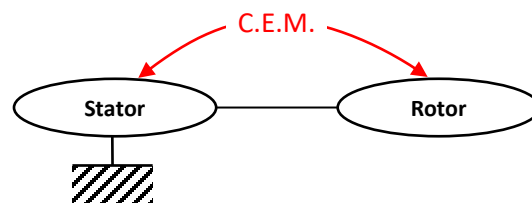
Remarque : Un câble et un ressort seront modélisés de la même façon sur un graphe d'isolement.

Exemple : Pilote automatique de bateau

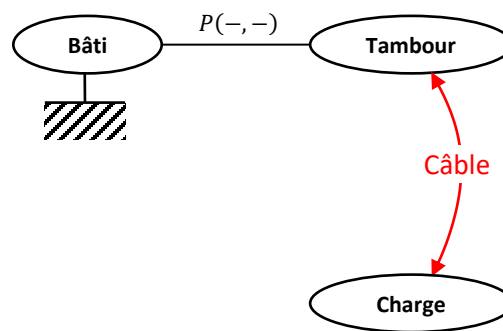


Remarque : L'action de l'huile est modélisée comme un ressort car le liquide est un ressort fluide.

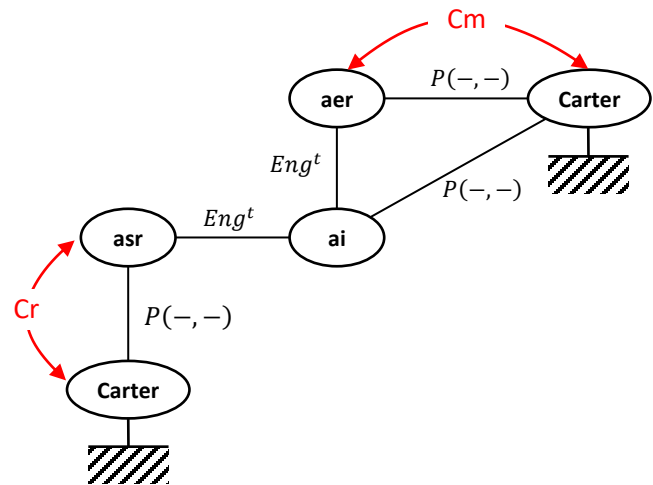
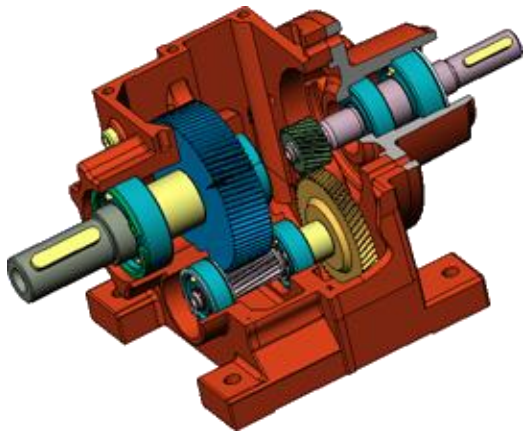
Exemple : moteur électrique



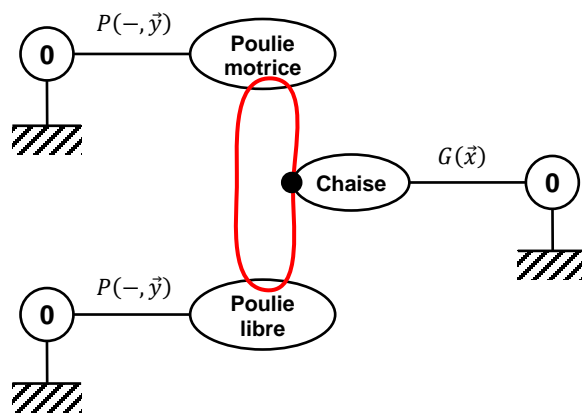
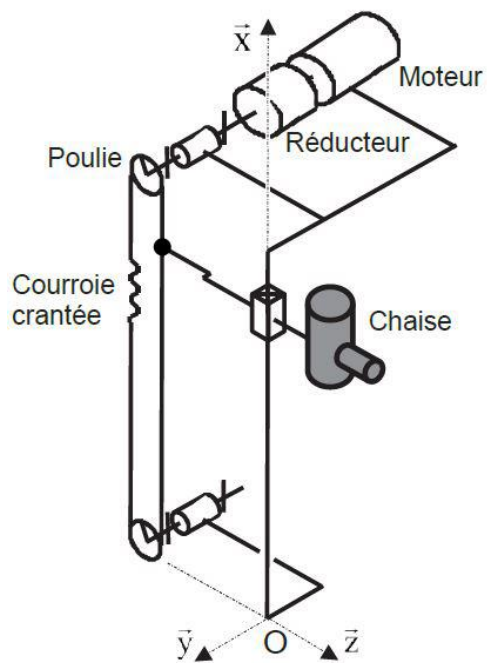
Exemple : tambour-câble



Exemple : réducteur simple à deux étages



Exemple : système poulies - courroie

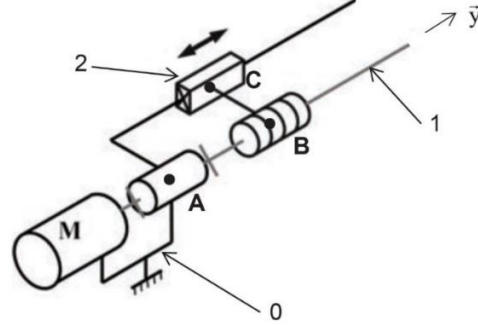


5.2 CAS PARTICULIERS DES LIAISONS AVEC FROTTEMENT

Le système support est un module linéaire équipant un robot industriel de l'industrie automobile.



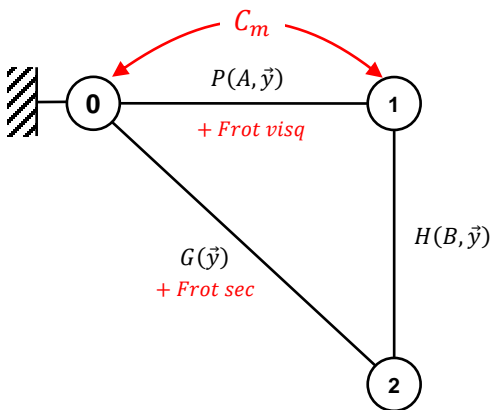
Module à entraînement par vis à billes de diamètre 16 mm et de pas $p=10$ mm



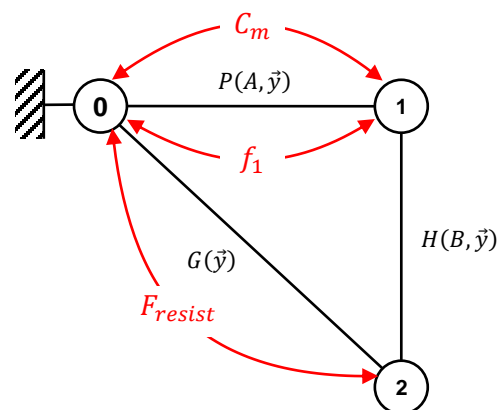
Hypothèses

- La liaison pivot entre la vis et le bâti est le siège d'un frottement visqueux de coefficient f_1 ;
- La liaison glissière est le siège d'un frottement sec modélisé par un effort résistant F_{resist} ;

Le graphe d'isolement faisant apparaître les frottements pourra être l'un des deux suivants :



Le frottement est « inclus » dans les liaisons. Les liaisons ne sont pas parfaites.



Le frottement est « exclu » des liaisons et apparaît explicitement en tant qu'action mécanique indépendante. Les liaisons sont parfaites.