Cours	**Statique des solides** B-Modéliser C-Résoudre

1 NECESSITE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE - HYPOTHESES

D'après « Sciences Industrielles de l'Ingénieurs » - Vuibert Prépa

Système

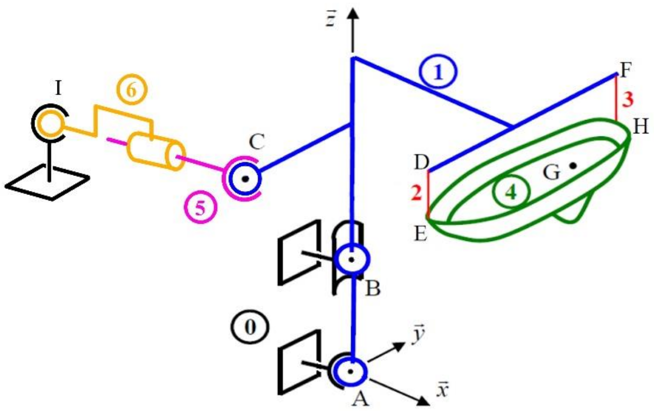
On s'intéresse à une console portante pour bateaux.

Elle destinée à mettre les bateaux à l'eau ou à les en retirer à partir d'un quai dans les ports de plaisance.

La console est essentiellement constituée :

- D'une potence articulée au sol pouvant tourner autour d'un axe vertical ;
- D'un vérin hydraulique permettant de faire tourner la potence ;
- D'un ensemble de treuils permettant de suspendre le bateau pendant les manœuvres.

Le modèle cinématique retenue est le suivant :



La potence **1** est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec le quai **0** grâce à une liaison rotule de centre A et une liaison linéaire annulaire de centre B et d'axe $(B, \vec{z})$.

Le bateau **4**, de centre d'inertie G et de masse m, est suspendu par deux câbles **2** et **3**.

En cas de vent, un vérin peut être utilisé pour maintenir en bateau en place (ancrage en C par une liaison rotule avec la tige du vérin).

La masse de la potence et celle des câbles sont négligées par rapport à celle du bateau.

Les frottements sont négligés.

On désire dimensionner :

- La potence (section des poutres) ;
- L'articulation de la potence (actions dans les roulements de l'axe vertical) ;
- Un vérin hydraulique permettant d'empêcher la potence de tourner en cas de vent.

Le dimensionnement ne peut être réalisé que si toutes les actions mécaniques s'appliquant sur les pièces du système sont connues.

Un des outils qui permet la détermination de ces actions mécaniques est le Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.).

1.1 HYPOTHESES

Le P.F.S. peut s'appliquer quand :

- Les solides sont en équilibre par rapport à un repère galiléen ;
- Les solides sont en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen ;
- Les solides sont en en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un repère galiléen et sont dynamiquement équilibrés.

Remarque 1 : on dit qu'un ensemble matériel E est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de E conserve une position fixe par rapport au repère R.

Remarque 2 : un repère est qualifié de « galiléen » si, dans ce repère, on peut vérifier le P.F.S. avec une bonne précision.

2 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

2.1 ENONCE

Il existe au moins un repère, appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble e d'un ensemble matériel E en équilibre par rapport à ce repère, la somme des torseurs d'action mécanique extérieure à e soit nulle.

$$\sum\{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{0\} \quad \forall\, e \subset E$$

Remarque : si la somme des torseurs d'action mécanique extérieure au système matériel e est nulle, il ne faut pas en déduire que le système matériel e est en équilibre par rapport au repère R.

Exemple pour la remarque : si on applique le Principe Fondamental de la Dynamique à un arbre dynamiquement équilibré tournant à vitesse constante autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen, on peut montrer que la somme des torseurs d'action mécanique extérieure à l'arbre est nulle. Et pourtant, l'arbre tourne…

2.2 THEOREMES VECTORIELS

2.2.1 Théorème de la résultante statique

La somme des résultante extérieures à un ensemble isolé E en équilibre est égale à 0 :

$$\sum \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

Cette équation vectorielle peut être projetée dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ afin d'obtenir 3 équations scalaires :

$$\begin{cases} \sum \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \cdot \vec{x} = 0 \\ \sum \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \cdot \vec{y} = 0 \\ \sum \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \cdot \vec{z} = 0 \end{cases}$$

2.2.2 Théorème du moment statique en $\boldsymbol{A}$

La somme des moments en A de toutes les actions mécaniques extérieures à E en équilibre est nulle.

$$\sum \vec{M}(A, \bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

Cette équation vectorielle peut être projetée dans une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ afin d'obtenir 3 équations scalaires :

$$\begin{cases} \sum \vec{M}(A,\bar{E}\rightarrow E)\cdot\vec{x}=0 \\ \sum \vec{M}(A,\bar{E}\rightarrow E)\cdot\vec{y}=0 \\ \sum \vec{M}(A,\bar{E}\rightarrow E)\cdot\vec{z}=0 \end{cases}$$

2.3 THEOREME DES ACTIONS MUTUELLES

L'action mécanique du sous-ensemble matériel e_2 sur le sous-ensemble e_1 est opposé à l'action mécanique de e_1 sur e_2.

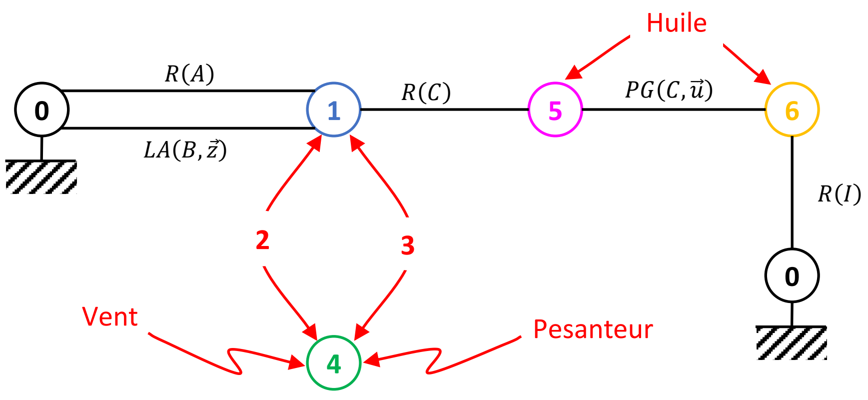
$$\{\mathcal{T}(e_2\rightarrow e_1)\}=-\{\mathcal{T}(e_1\rightarrow e_2)\}$$

3 METHODOLOGIE D'APPLICATION

3.1 GRAPHE D'ISOLEMENT

Toute étude statique commence par le tracé d'un graphe appelé « graphe d'isolement » faisant apparaître les groupes cinématiques, les liaisons entre les groupes, les actions mécaniques (autres que celles dans les liaisons) connues ou inconnues.

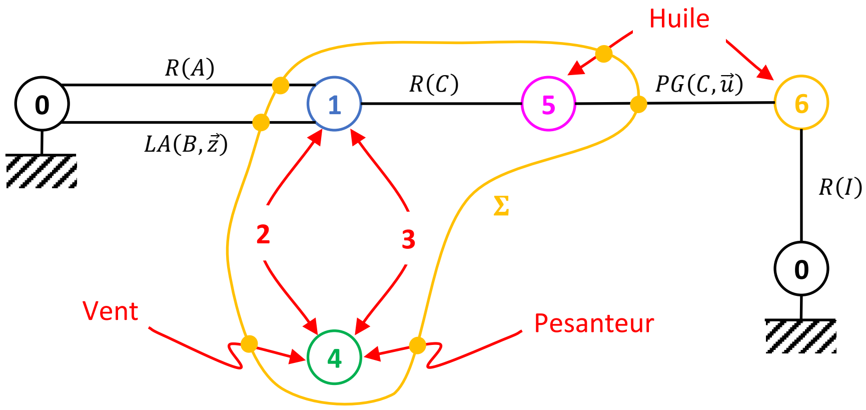
Graphe d'isolement de la console portante :



3.2 ISOLEMENT

L'énoncé du PFS fait apparaître la notion « d'action mécanique extérieure ». La notion « d'extérieur » ne peut être définie que si une frontière a été définie au préalable. Isoler un ensemble matériel consiste donc à tracer autour de cet ensemble une frontière appelée « frontière d'isolement ».

Exemple : Isolement de l'ensemble $\Sigma=\{\mathbf{1};\mathbf{4};\mathbf{5}\}$



3.3 BILAN DES ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES (B.A.M.E.)

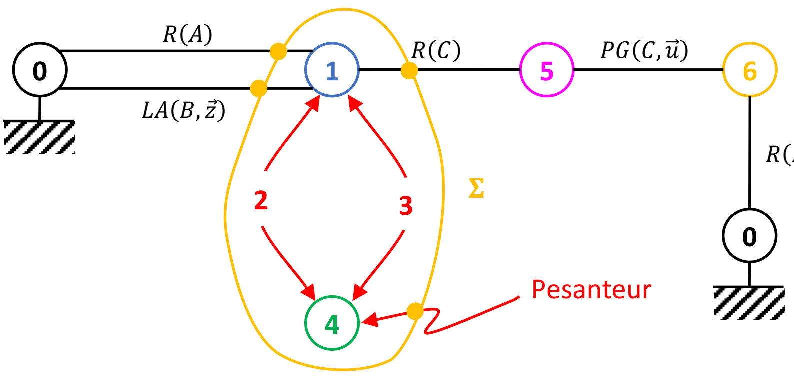
3.3.1 Définition

Faire un bilan des actions mécaniques extérieures (B.A.M.E.), c'est inventorier toutes les actions mécaniques venant de l'extérieur et qui s'exercent sur le système isolé.

Remarque : les actions mécaniques intérieures au système isolé ne doivent jamais être prise en compte quand on applique le P.F.S..

3.3.2 Application au cas de la potence

1er cas : absence de vent et d'action du vérin



Isolement de $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}\}$

- B.A.M.E.

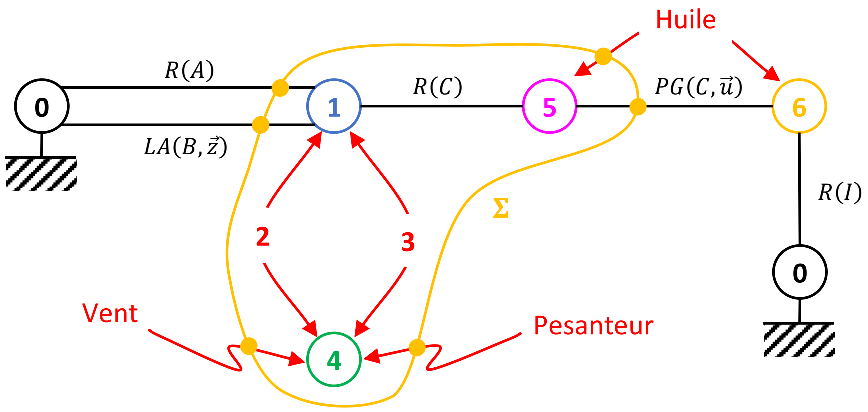
En G $\quad \{\mathcal{T}(Pes \rightarrow 4)\} = \left\{-m.g.\vec{z} \quad \vec{0}\right\}_G$

En C $\quad \{\mathcal{T}(tige \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_C = \{0\}$ par isolement préalable de $\{tige + corps\}$

En A $\quad \left\{\mathcal{T}\left(0 \xrightarrow{R} 1\right)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}\left(0 \xrightarrow{R} 1\right) \\ \vec{M}\left(A, 0 \xrightarrow{R} 1\right) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$

En B $\quad \left\{\mathcal{T}\left(0 \xrightarrow{LA} 1\right)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}\left(0 \xrightarrow{LA} 1\right) \\ \vec{M}\left(B, 0 \xrightarrow{LA} 1\right) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$

2ème cas : **présence de vent et d'action du vérin**



Isolement de $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}; \boldsymbol{tige}\}$

- B.A.M.E.

En G $\quad \{\mathcal{T}(Pes \rightarrow 4)\} = \{-m.g.\vec{z} \quad \vec{0}\}_G$

En G $\quad \{\mathcal{T}(vent \rightarrow 4)\} = \{\vec{F}_{vent} \quad \vec{0}\}_G$

En C $\quad \{\mathcal{T}(huile : 6 \rightarrow 5)\} = \{\vec{F}_{vérin} \quad \vec{0}\}_C$ avec $\|\vec{F}_{vérin}\| = p.S$

S : surface du piston

En A $\quad \left\{\mathcal{T}\left(0 \xrightarrow{R} 1\right)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}\left(0 \xrightarrow{R} 1\right) \\ \vec{M}\left(A, 0 \xrightarrow{R} 1\right) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$

En B $\quad \left\{\mathcal{T}\left(0 \xrightarrow{LA} 1\right)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}\left(0 \xrightarrow{LA} 1\right) \\ \vec{M}\left(B, 0 \xrightarrow{LA} 1\right) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$

En C $\quad \{\mathcal{T}(6 \rightarrow 5)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(6 \rightarrow 5) \\ \vec{M}(C, 6 \rightarrow 5) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_C$

Remarque : $\begin{cases} \vec{R}(6 \rightarrow 5) \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{M}(C, 6 \rightarrow 5) \cdot \vec{x} = 0 \end{cases}$

3.4 APPLICATION DES THEOREMES

On donne :

- $\overrightarrow{AB} = z_B.\vec{z} \quad z_B = 4\,m$
- $\overrightarrow{AC} = -y_C.\vec{y} + z_C.\vec{z} \quad y_C = 4\,m \quad z_C = 5\,m$
- $\overrightarrow{AG} = x_G.\vec{x} + y_G.\vec{y} + z_G.\vec{z} \quad x_G = 6\,m \quad y_G = 2\,m \quad z_G = 6\,m$
- $\vec{u} = \cos\alpha.\vec{x} + \sin\alpha.\vec{y}$
- $m = 2\,500\,kg$
- $\vec{F}_{vent} = F_x.\vec{x} + F_y.\vec{y} \quad F_x = 12\,000\,N \quad F_y = 8\,000\,N$
- $S = 2\,500.\pi\ mm^2$

1er cas : **absence de vent et d'action du vérin**

On souhaite déterminer les actions dans les deux roulements qui guident la potence.

3.4.1 Théorème de la Résultante Statique

Appliquer le Théorème de la Résultante Statique à l'ensemble $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}\}$

3.4.2 Théorème du Moment Statique en $\boldsymbol{A}$.

Appliquer le Théorème du Moment Statique en A à l'ensemble $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}\}$

2ème cas : **présence de vent**

On souhaite vérifier que la pression d'alimentation du vérin ne dépasse pas $250\ bar$ pour contrer l'action du vent.

3.4.3 Théorème de la Résultante Statique

Appliquer le Théorème de la Résultante Statique à l'ensemble $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$

3.4.4 Théorème du Moment Statique en B en projection sur $\vec{z}$.

Appliquer le Théorème du Moment Statique en B en projection sur $\vec{z}$ à l'ensemble $\Sigma = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$

3.5 RESOLUTION DES EQUATIONS

1er cas : **absence de vent et d'action du vérin**

Résoudre le système d'équations et déterminer les actions dans les deux roulements qui guident la potence.

2ème cas : **présence de vent**

Résoudre les équations, déterminer la pression d'alimentation du vérin et vérifier qu'elle ne dépasse pas $250\ bar$.