

# Asservissements linéaires

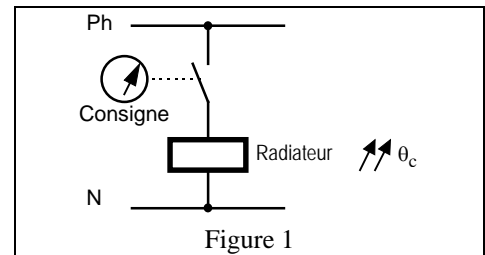
## I. Introduction

Les systèmes asservis se rencontrent dans différents domaines :

- régulation de vitesse des moteurs,
- asservissement de position,
- régulation de chauffage,
- asservissement de tension.

### Exemple simple de régulation

Le but du montage de la Figure 1 est de réguler la température d'un local. C'est un système asservi.



### Définition d'un système asservi

Un système asservi est un système qui agit de telle sorte qu'une grandeur de sortie soit toujours identique à une grandeur de consigne et cela quelques soient les perturbations sur la grandeur de sortie.

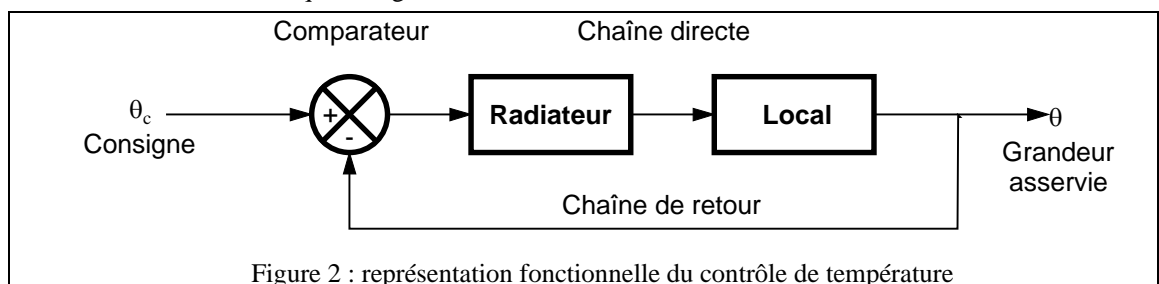
Dans l'exemple précédent, on règle la consigne de température  $\theta_c$  à une valeur de température souhaitée puis on mesure la température du local  $\theta$  :

- si  $\theta < \theta_c$  le contact est fermé, le chauffage est alimenté,
- si  $\theta > \theta_c$  le contact est ouvert, le chauffage est arrêté.

La température du local  $\theta$  est alors maintenue à la valeur de consigne  $\theta_c$ .

### Schéma fonctionnel d'un système asservi

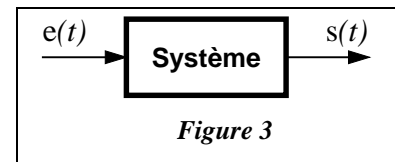
Le système asservi de l'exemple précédent peut être représenté sous forme de schéma fonctionnel ou schéma bloc comme l'indique la Figure 2.



- Une telle structure se nomme chaîne d'asservissement.
- Quand la valeur de consigne est invariante dans le temps, le système constitue une **régulation**.

## II. Outils mathématiques

Pour être étudié de manière théorique afin de prévoir ses réactions et ses performances, un système (Cf. Figure 3) doit être modélisé. La modélisation permet d'écrire une équation différentielle entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie du système.



Le but de la modélisation mathématique est d'anticiper la réponse du système  $s(t)$  suivant les variations de l'entrée  $e(t)$ , en précisant les critères suivants : précision, stabilité, temps de réponse, sensibilité aux perturbations. La connaissance de l'évolution de  $s(t)$  permet d'apprécier la différence par rapport aux objectifs à atteindre. On peut alors corriger les réactions du système pour améliorer ses performances. En outre, cette modélisation est un outil nécessaire au calcul des correcteurs.

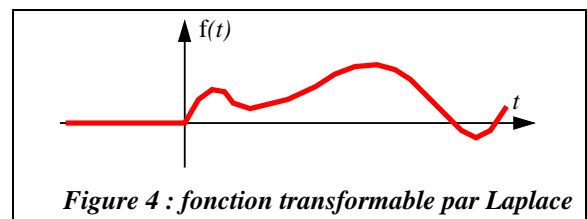
La résolution de l'équation différentielle entre  $e(t)$  et  $s(t)$  fait appel à l'outil mathématique : la **transformée de Laplace**.

### Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace permet de passer de la représentation temporelle d'un signal à une représentation dans un espace de fonction, certes plus abstrait, mais permettant des calculs plus aisés.

#### Définition

$L(f(t)) = F(p)$  avec  $f(t)$  nulle pour  $t < 0$   
 $f(t)$  fonction dérivable  
 $F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$ .  
 $f$  est appelée « original » de  $F$ .



#### Expression de la transformée par Laplace d'une fonction

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-tp} dt$$

#### Conventions/remarque

Dans le domaine temporel, les fonctions sont notées en lettres minuscules.

Dans le domaine de Laplace, les fonctions sont notées en lettres majuscules.

### Propriétés

Soient les fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ , dont les transformées de Laplace sont  $F(p)$  et  $G(p)$ . On peut démontrer les propriétés indiquées dans le Tableau 1.

|             |               |  |                            |   |                                   |
|-------------|---------------|--|----------------------------|---|-----------------------------------|
| Original    | $f(t) + g(t)$ | $\lambda \cdot f(t)$<br>$\lambda \in \mathbb{R}$ | $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ | $f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$        | $\int f(t) \cdot dt$              |
| Transformée | $F(p) + G(p)$ | $\lambda \cdot F(p)$                             | $p \cdot F(p) - f(0)$      | $p^2 \cdot F(p) - p \cdot f'(0) - f(0)$ | $\frac{F(p)}{p} - \frac{f(0)}{p}$ |

**Tableau 1 : quelques transformées de Laplace courantes.**

#### Remarque

Dans le cas de systèmes asservis, on considérera toujours que les conditions initiales sont toutes nulles. Les propriétés précédentes sont donc simplifiées. Elles sont présentées dans le Tableau 2.

|             |               |  |                            |                                  |                      |
|-------------|---------------|--|----------------------------|----------------------------------|----------------------|
| Original    | $f(t) + g(t)$ | $\lambda \cdot f(t)$<br>$\lambda \in \mathbb{R}$ | $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ | $f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ | $\int f(t) \cdot dt$ |
| Transformée | $F(p) + G(p)$ | $\lambda \cdot F(p)$                             | $p \cdot F(p)$             | $p^2 \cdot F(p)$                 | $\frac{F(p)}{p}$     |

**Tableau 2 : transformées de Laplace pour des conditions initiales nulles.**

### Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

### Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

### Théorème du retard

La transformée de Laplace d'un signal débutant à l'instant  $t = \tau$ , ( $f(t) = 0$  pour  $t < \tau$ ) est égale à la transformée du signal débutant à  $t = 0$  multipliée par  $e^{-\tau p}$ .

$$L(f(t - \tau)) = F(p) \cdot e^{-\tau p}$$

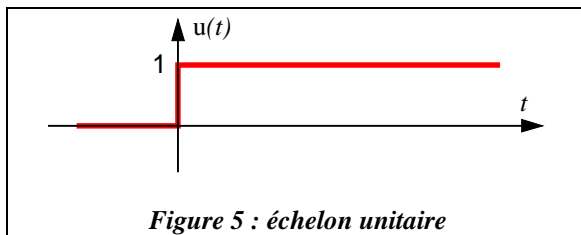
### Théorème de la périodicité (signal périodique)

La transformée de Laplace d'un signal périodique de période  $T$  est égale à la transformée de Laplace limitée à une période  $T$  multipliée par  $\frac{1}{1 - e^{-Tp}}$ .

$$L(f(t)) = F(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \text{ avec } f \text{ T-périodique}$$

## Exemples de calculs de transformées de Laplace

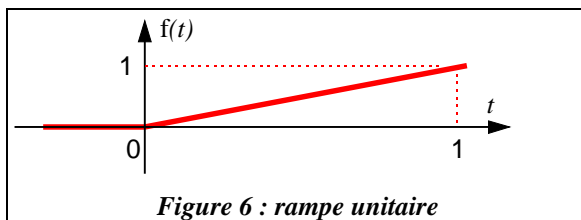
### 1. Transformée de Laplace de 1 (échelon unitaire)



Pour l'échelon unitaire

$$L(1) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-tp} dt = \frac{1}{p} = U(p)$$

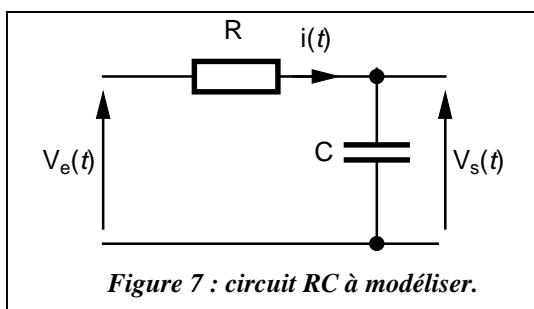
### 2. Transformée de Laplace d'une rampe unitaire



Pour la rampe unitaire

$$L f(t) = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-tp} dt = \frac{1}{p^2}$$

### 3. Etude d'un circuit RC



Calcul de la fonction de transfert de ce système

$$h(t) = \frac{v_s(t)}{v_e(t)}$$

$$v_s(t) + R \cdot i(t) = v_e(t)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_s(t)}{dt}$$

Passage au domaine de Laplace

$$V_e(p) = V_s(p) + RC \cdot V_s(p) \quad \text{soit} \quad H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec } \tau = RC$$

Réponse à l'échelon unité  $U(p)$

$$L(u(t)) = U(p) = \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad V_e(p) = \frac{1}{p}$$

$$V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau \cdot p)}$$

Application du théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_s(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tau \cdot p} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = 1$$

Application du théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot V_s(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \tau \cdot p} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_s(t) = 0$$

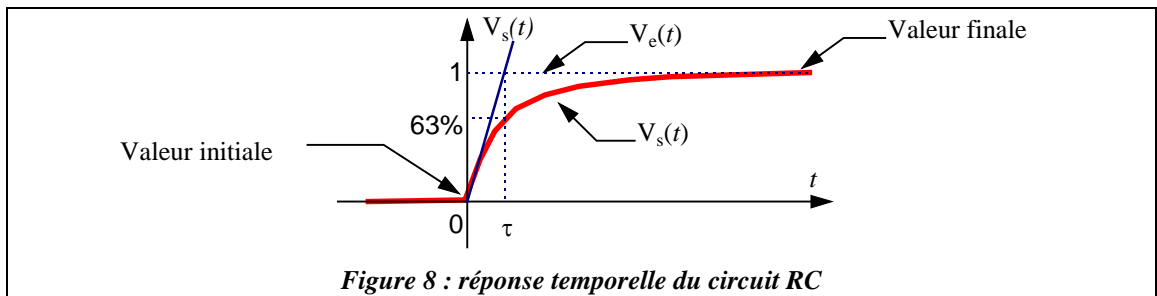


Figure 8 : réponse temporelle du circuit RC

## Inversion de Laplace

La méthode de résolution du problème consistant à retrouver la fonction originale (c'est à dire effectuer la transformation  $F(p) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$ ) s'opère par une décomposition de la fraction  $F(p)$  en éléments simples pour retrouver des formes connues dans une table de transformées inverses de Laplace.

### 1. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $R(p)$

$$\text{Soit une fraction rationnelle } R(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

On appelle **pôles** de  $R(p)$ , les zéros du dénominateur  $D(p)$ . On note  $p_i$  ( $i \in [1, n]$ ) ces pôles.

Dans le cas de pôles simples, la fraction rationnelle  $R(p)$  se décompose en une somme unique de fractions simples :

$$R(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K_1}{p - p_1} + \frac{K_2}{p - p_2} + \dots + \frac{K_i}{p - p_i} + \dots + \frac{K_n}{p - p_n}$$

avec :

$$K_i = \left( \frac{N(p)}{D(p)} (p - p_i) \right)_{p=p_i}$$

## 2. Exemple : réponse à l'échelon unité $U(p)$ du circuit RC

Soit le circuit RC étudié précédemment.

Sa fonction de transfert est  $H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$  avec  $\tau = RC$ .

La réponse à l'échelon unité  $V_e(p) = U(p)$  est  $V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau \cdot p)}$

Calcul de la transformée inverse de  $V_s(p)$

$$V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau \cdot p)} = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{1 + \tau \cdot p}$$

$$\text{avec } K_1 = \left( \frac{p}{p(1 + \tau \cdot p)} \right)_{p=0} = 1 \text{ et } K_2 = \left( \frac{1 + \tau \cdot p}{p(1 + \tau \cdot p)} \right)_{p=-\frac{1}{\tau}} = -\tau$$

$$\text{Soit : } V_s(p) = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau \cdot p}$$

La table de transformée inverse donne :  $L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = u(t)$  et  $L^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = u(t) \cdot e^{-a \cdot t}$

d'où

$$v_s(t) = u(t) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

## III. Diagramme fonctionnel

Le but de ce diagramme est de remplacer un système d'équations par un schéma bloc (c'est un mode de représentation graphique).

### Éléments du diagramme fonctionnel

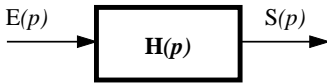
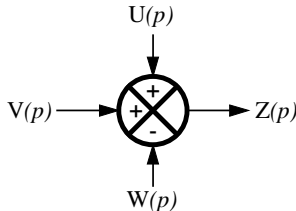
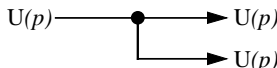
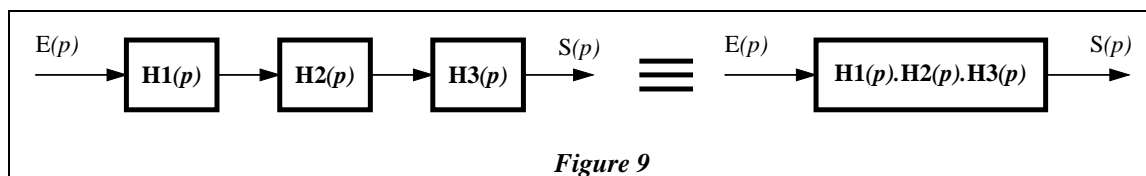
| Élément               | Symbole « bloc »   | Signification               |
|-----------------------|--|-----------------------------|
| Bloc et branche       |  | $S(p) = H(p) \cdot E(p)$    |
| Sommateur/comparateur |  | $Z(p) = U(p) + V(p) - W(p)$ |
| Point de prélèvement  |  |                             |

Tableau 3 : éléments de base des schémas blocs

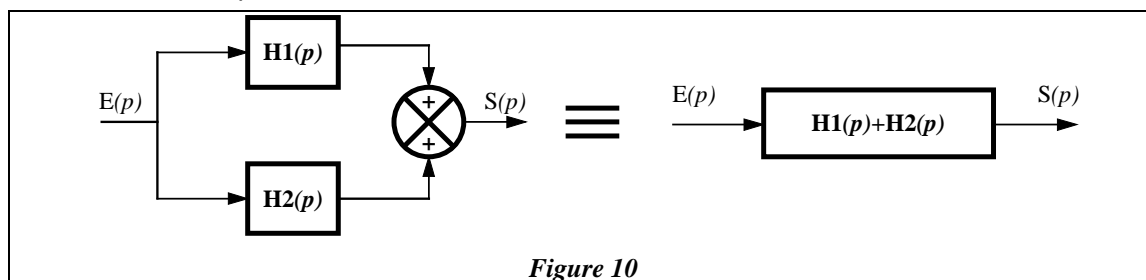
# Règles de transformation des schémas blocs

## 1. Structure en boucle ouverte

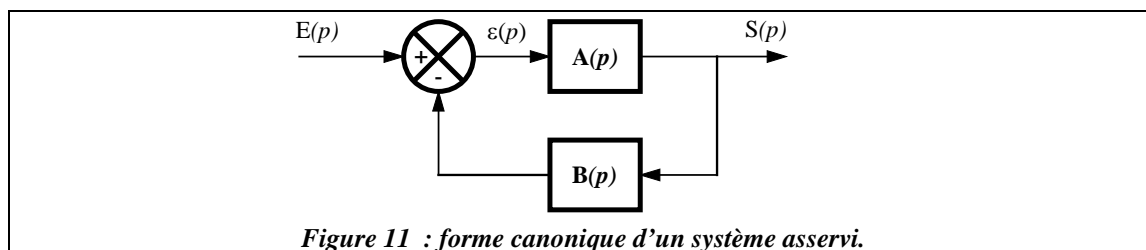
Transmittance série



Transmittance parallèle



## 2. Structure en boucle fermée (structure de base d'un asservissement)

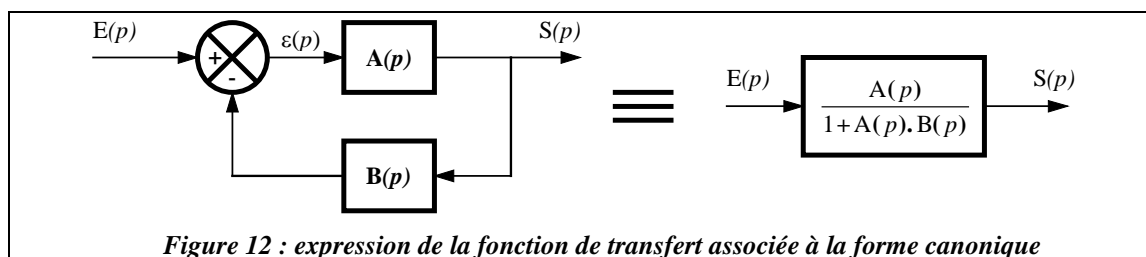


Calcul de la transmittance  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(p) = E(p) - B(p).S(p) \\ S(p) = A(p). \varepsilon(p) \end{array} \right\} \Rightarrow S(p) = A(p).[E(p) - B(p).S(p)]$$

En factorisant  $S(p)$  et  $E(p)$  :  $S(p).[1 + A(p).B(p)] = A(p).E(p)$

$$\text{d'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$



### 3. Déplacement des points de prélèvement

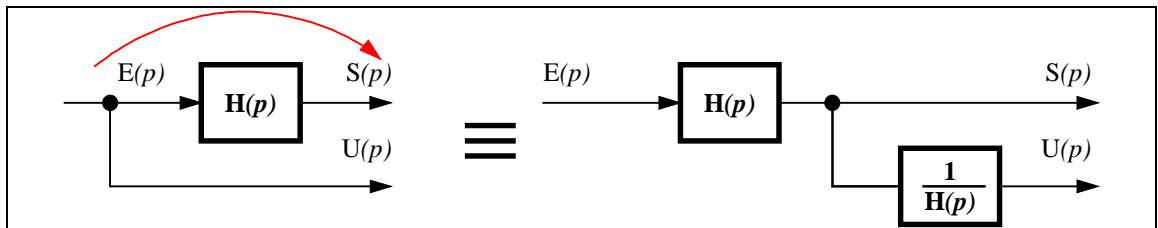


Figure 13

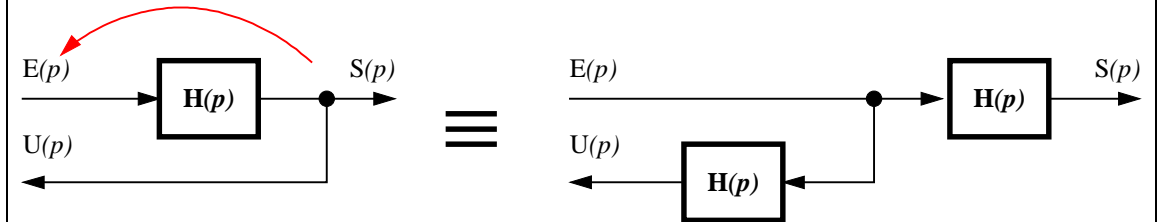


Figure 14

### 4. Déplacement des points de sommation

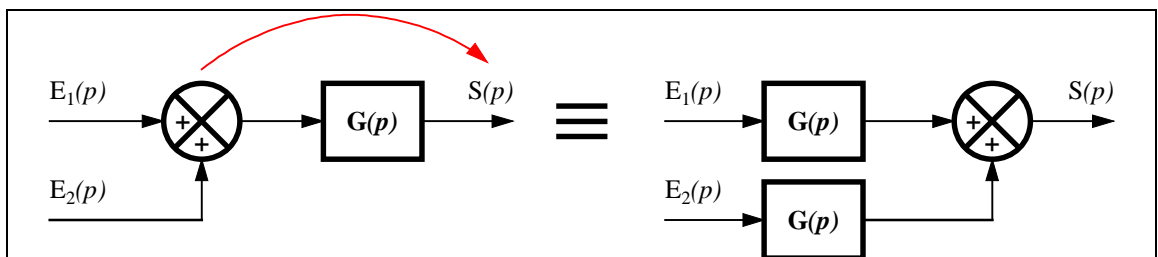


Figure 15

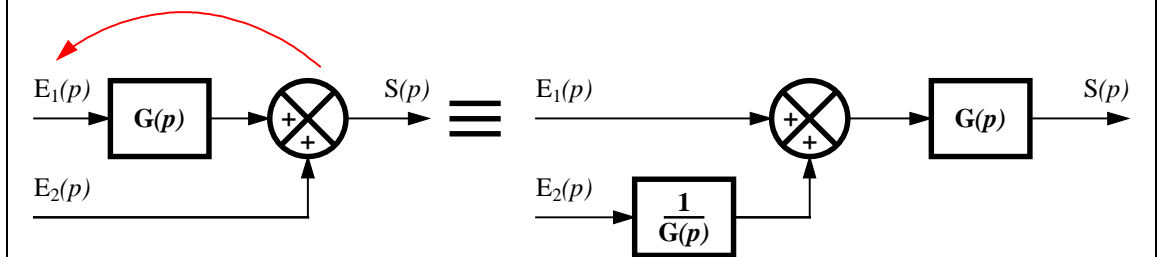


Figure 16

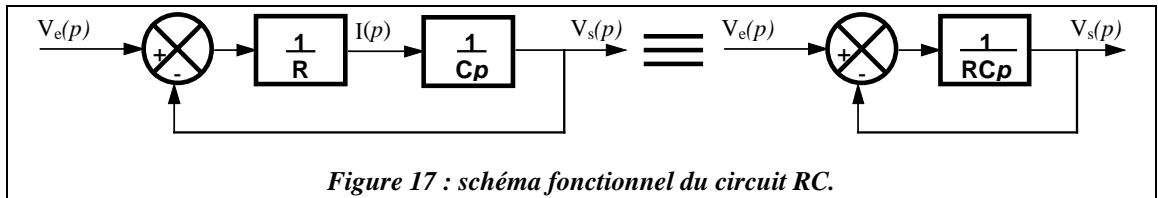
### Application : schéma bloc du circuit RC

Mise sous forme de schéma bloc du réseau RC de la Figure 7 (page 3) : la grandeur d'entrée est  $V_e(p)$  et celle de sortie  $V_s(p)$ .

$$i(t) = \frac{v_e(t) - v_s(t)}{R} \text{ et } i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} \text{ soit } v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$$

Passage au domaine de Laplace :

$$I(p) = \frac{V_e(p) - V_s(p)}{R} \text{ et } V_s(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$$



$$\text{Fonction de transfert } H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{\frac{1}{RCp}}{1 + \frac{1}{RCp}} \quad \text{soit} \quad H(p) = 1 + \frac{1}{RCp}$$

## IV. Stabilité les systèmes asservis

### Définition

Un système est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont tous à partie réelle négative ou nulle.

#### 1. Exemple 1

Soit le système dont la fonction de transfert est  $H(p) = \frac{1}{p + a}$  (a étant un réel)

Recherche des pôles de  $H(p)$  (valeurs de  $p$  qui annulent le dénominateur) :  $p + a = 0$  soit  $p_0 = -a$

Pour être stable, le système doit être tel que  $p_0 < 0$  soit  $a > 0$

#### 2. Exemple 2

Soit le système dont la fonction de transfert est  $H(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$

Recherche des pôles de cette fonction de transfert :

$$p^2 + p + 1 = 0$$

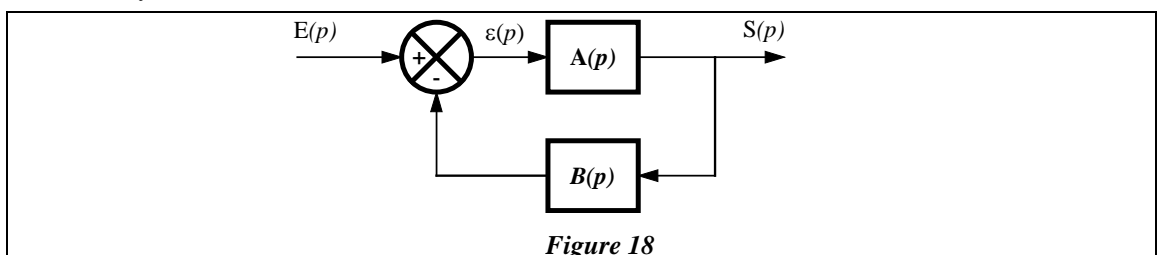
$$\Delta = -3 \quad \text{donc } p_0 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \text{ et } p_1 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$

Partie réelle des pôles :  $\Re(p_0) = -\frac{1}{2} \leq 0 \quad \Re(p_1) = -\frac{1}{2} \leq 0$

Le système est stable

### Critère de stabilité

Soit le système suivant :





La fonction de transfert de ce système est  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$

D'après la définition précédente, pour étudier la stabilité de ce système, il faut que les pôles de  $H(p)$  soient à partie réelle négative ou nulle.

Il faut donc savoir si les solutions de l'équation  $1 + A(p).B(p) = 0$  ou  $A(p).B(p) = -1$  sont à partie réelle négative ou nulle. Cette condition implique donc une étude de la transmittance en boucle ouverte  $A(p).B(p)$ .

On appelle  $A(p).B(p)$ , la transmittance en boucle ouverte.

## 1. Etude de $A(p).B(p)$ dans le plan de Nyquist

On trace la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $A(p).B(p)$  dans le plan complexe appelé plan de Nyquist en faisant décrire à  $p$  le contour  $(\mathcal{C})$ .

Pour parcourir le contour  $(\mathcal{C})$ , on pose  $p = j\omega$  et on fait varier  $\omega$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

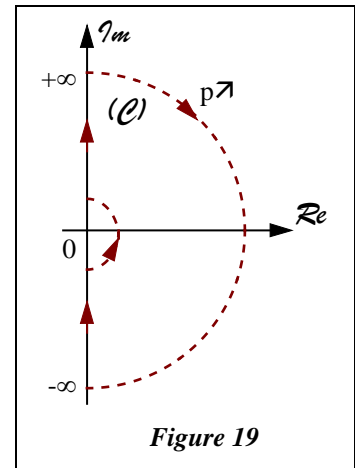


Figure 19

## 2. Critère du Revers

Un système est stable en boucle fermée, si un observateur parcourant son lieu de transfert **en boucle ouverte** suivant les  $\omega$  croissants, voit le point  $(-1)$  à sa gauche.

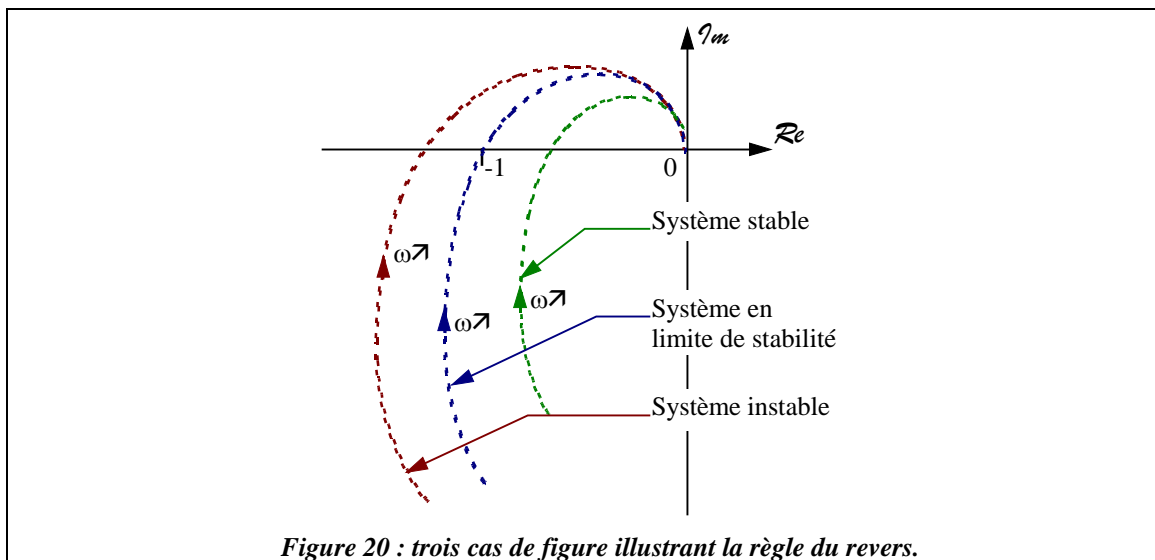


Figure 20 : trois cas de figure illustrant la règle du revers.

## 3. Application

Soit le système de la figure Figure 21.

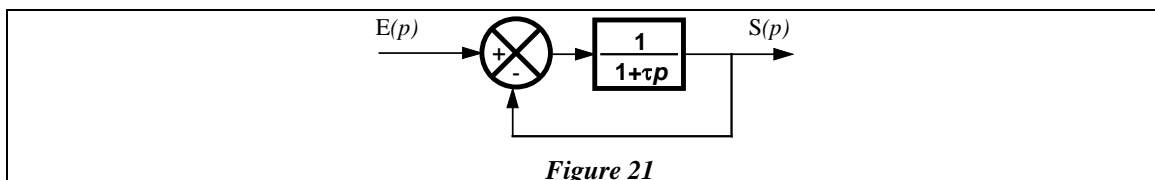


Figure 21

ici  $A(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$  et  $B(p) = 1$

Fonction de transfert en boucle ouverte  $F(p) = A(p) \cdot B(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$

Pour tracer l'image de  $F(p)$  dans le plan complexe, on pose  $p = j\omega$ , soit  $F(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$

Partie réelle et partie imaginaire de  $F(j\omega)$  :

$$F(j\omega) = \frac{1 - j \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \quad \Re[F(j\omega)] = \Re[F(j\omega)] = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \text{ et } \Im[F(j\omega)] = \frac{-\tau \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

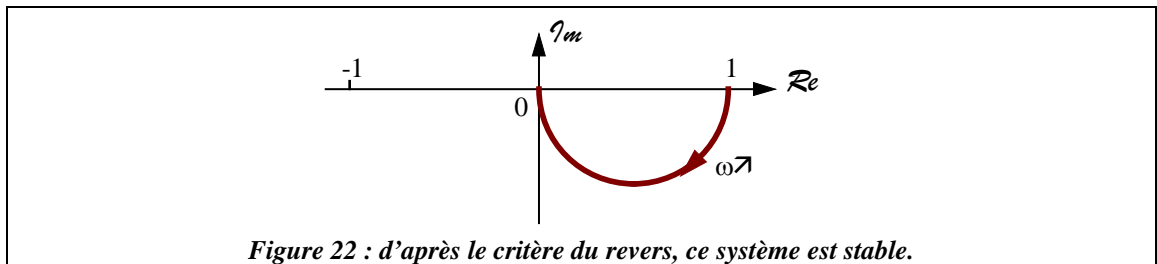
Module et argument de  $F(j \cdot \omega)$  :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \quad \text{Arg}[F(j\omega)] = -\text{Arctg } \tau \omega$$

Etude des limites de  $F(j \cdot \omega)$  :

Quand  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $\Re[F(j\omega)] \rightarrow 1$  et  $\Im[F(j\omega)] \rightarrow 0^-$  d'où  $\text{Arg}[F(j\omega)] \rightarrow 0^-$

Quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\Re[F(j\omega)] \rightarrow 0^+$  et  $\Im[F(j\omega)] \rightarrow 0^-$  d'où  $\text{Arg}[F(j\omega)] \rightarrow -\frac{\pi}{2}$



## V. Marge de gain et marge de phase

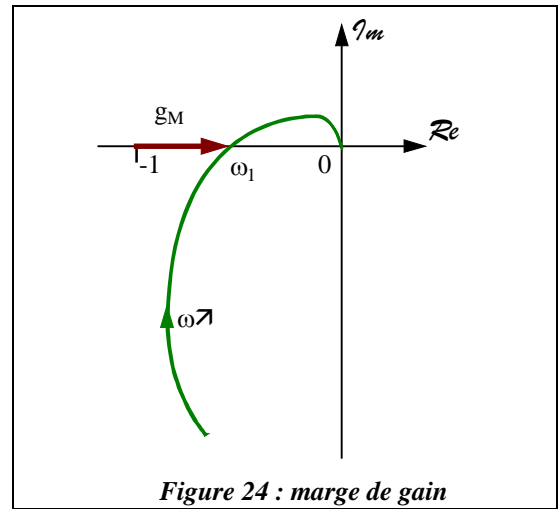
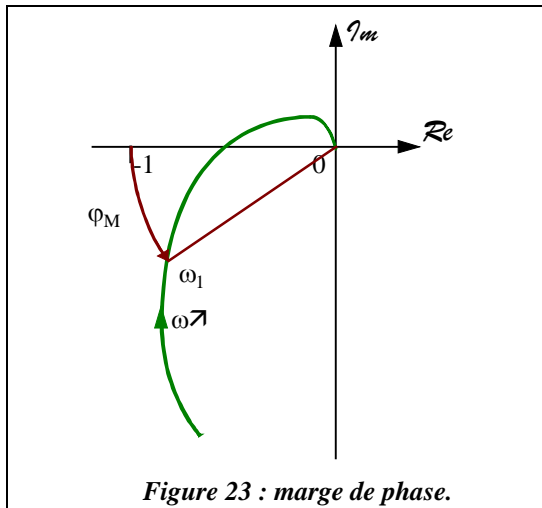
### Interprétation sur le lieu de Nyquist

#### 1. Marge de phase

Sur le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte, on trace le cercle de rayon 1 qui coupe ce lieu en un point correspondant à  $\omega_1$ . (Figure 23). La phase entre le point critique et l'affixe, notée  $\phi_M$ , est appelée « marge de phase ».

#### 2. Marge de gain

La marge de gain est le nombre de décibels dont le gain en boucle ouverte pourrait augmenter sans amener l'instabilité (Figure 24). Le gain mesuré entre ce point et le point critique, noté  $g_M$ , est appelé « marge de gain ».



## Interprétation sur le lieu de Bode

Soit la fonction de transfert en boucle ouverte  $A(p).B(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$

### 1. Diagrammes asymptotiques de gain et de phase de $A(p).B(p)$

On pose  $p = j\omega$  :  $A(j\omega).B(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)}$

Gain  $G = 20 \text{ Log } |A(j\omega).B(j\omega)|$

$$G = 20 \text{ Log } |K| + 20 \text{ Log } \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} \right| + 20 \text{ Log } \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \right| + 20 \text{ Log } \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau_3} \right|$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

phase  $\varphi = \text{Arg } [A(j\omega).B(j\omega)]$

$$\varphi = 0 - \text{Arctg } \tau_1\omega - \text{Arctg } \tau_2\omega - \text{Arctg } \tau_3\omega$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$$

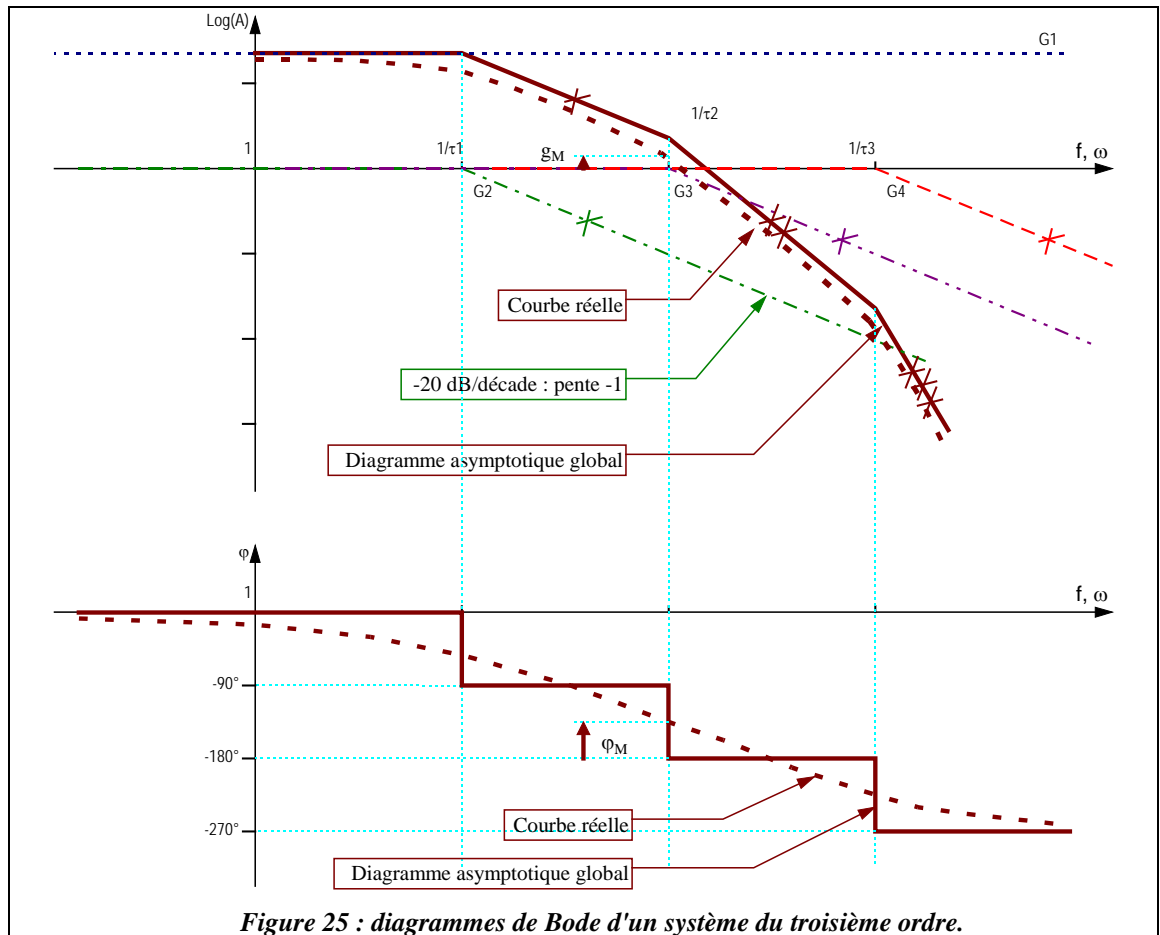
On trace les diagrammes asymptotiques de  $G_1, G_2, G_3, G_4$  et de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Le système global a pour diagramme asymptotique l'ensemble des points dont chacun d'eux est la somme des points des diagrammes composants.

### 2. Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Bode

Marge de gain Différence entre le gain du point (-1) soit  $G = 0$  et le gain correspondant à  $\varphi = \text{Arg } [A(j\omega).B(j\omega)] = -180^\circ$ .

Marge de phase Différence entre la phase du point (-1) soit  $\varphi = -180^\circ$  et la phase correspondant à  $G = 20 \text{ Log } |A(j\omega).B(j\omega)| = 0$ .

### 3. Lieu de Bode de $A(j\omega)$ . $B(j\omega)$



## VI. Précision d'un système asservi

### Classe d'un système asservi

La fonction de transfert  $A(p)$ .  $B(p)$  d'un système asservi comme l'indique la Figure 11 (page 6) peut se mettre sous la forme :

$$A(p).B(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k}{p^\alpha (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_j p^j)} \text{ avec } \alpha + j > k$$

$\alpha$  est appelé classe du système

### Précision d'un système asservi

$$A(p).B(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k}{p^\alpha (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_j p^j)} = \frac{K_0 \cdot (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_k p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_j p^j)}$$

$$\text{avec } K_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

## 1. Transmittance de l'erreur

$$\text{Transmittance de l'erreur } T_\varepsilon = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p). B(p) \quad \text{soit } \varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p). A(p). B(p)$$

$$\text{or } S(p) = \varepsilon(p). A(p)$$

$$\text{d'où : } \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + A(p).B(p)}$$

## 2. Erreur de position

L'erreur de position est l'erreur de réponse  $\varepsilon(t)$  lorsque l'entrée  $E(t)$  est un échelon  $u(t)$ .

$$E(t) = u(t) \quad \text{dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\text{d'où } \varepsilon(p) = \frac{1}{p(1 + A(p).B(p))} = \frac{1}{p \left( 1 + \frac{K_0 \cdot (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_k p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_j p^j)} \right)}$$

Calcul de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (théorème de la valeur finale) :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$ ,

$$\text{soit : } \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_0 \cdot (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_k p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_j p^j)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_0}{p^\alpha}}$$

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Système de classe 0</b> | $\alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{1 + K_0}$ |
| <b>Système de classe 1</b> | $\alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$                 |
| <b>Système de classe 2</b> | $\alpha = 2 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$                 |

**Tableau 4 : erreur de position pour les classes 0, 1 et 2.**

Pour un système de classe  $\alpha$  supérieure ou égale à 1, l'erreur de position est nulle

## 3. Erreur de traînage

L'erreur de traînage est l'erreur de réponse  $\varepsilon(t)$  lorsque l'entrée  $E(t)$  est une rampe  $t \cdot u(t)$ .

$$E(t) = t \cdot u(t) \quad \text{dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{1}{p^2}$$

Calcul de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^2 \left( 1 + \frac{K_0 \cdot (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_k p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_j p^j)} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{K_0 \cdot p}{p^\alpha}}$$

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Système de classe 0</b> | $\alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow +\infty$       |
| <b>Système de classe 1</b> | $\alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{K_0}$ |
| <b>Système de classe 2</b> | $\alpha = 2 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$             |
| <b>Système de classe 3</b> | $\alpha = 3 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$             |

**Tableau 5 : erreur de traînage pour les classes 0, 1, 2 et 3.**

Pour un système de classe  $\alpha$  supérieure ou égale à 2, l'erreur de traînage est nulle

#### 4. Erreur en accélération

L'erreur en accélération est l'erreur de réponse  $\varepsilon(t)$  lorsque l'entrée  $E(t)$  est une accélération  $\frac{t^2}{2} \cdot u(t)$ .

$$E(t) = \frac{t^2}{2} u(t) \quad \text{dans le domaine de Laplace} \quad E(p) = \frac{1}{p^3}$$

Calcul de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ :

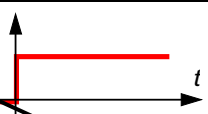
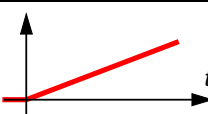
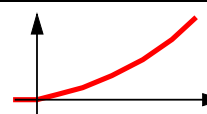
$$\text{soit} \quad \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^3 \left( 1 + \frac{K_0 \cdot (1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_k p^k)}{p^\alpha (1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_j p^j)} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{K_0 \cdot p^2}{p^\alpha}}$$

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Système de classe 0</b> | $\alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow +\infty$       |
| <b>Système de classe 1</b> | $\alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow +\infty$       |
| <b>Système de classe 2</b> | $\alpha = 2 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{K_0}$ |
| <b>Système de classe 3</b> | $\alpha = 3 \Rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$             |

*Tableau 6 : erreur en accélération pour les classes 0, 1, 2 et 3*

Pour un système de classe  $\alpha$  supérieure ou égale à 3, l'erreur en accélération est nulle

#### 5. Tableau récapitulatif

| Réponse à         |  |  |  |
|-------------------|---|--|---|
| Classe du système |   |  |   |
| Transformée       | $E(p) = \frac{1}{p}$  | $E(p) = \frac{1}{p^2}$   | $E(p) = \frac{1}{p^3}$  |
| 0                 | $\frac{1}{1 + K_0}$   | $+\infty$  | $+\infty$   |
| 1                 | 0   | $\frac{1}{K_0}$  | $+\infty$   |
| 2                 | 0   | 0  | $\frac{1}{K_0}$   |
| 3                 | 0   | 0  | 0   |

*Tableau 7 : erreur de position, de traînage et en accélération pour les classes 0, 1, 2 et 3.*

## VII. Correction des systèmes asservis

### Positionnement du problème

#### 1. Dualité précision stabilité

Soit le système asservi dont le lieu de Nyquist en boucle ouverte  $A(p) \cdot B(p)$  est donné à la Figure 26.

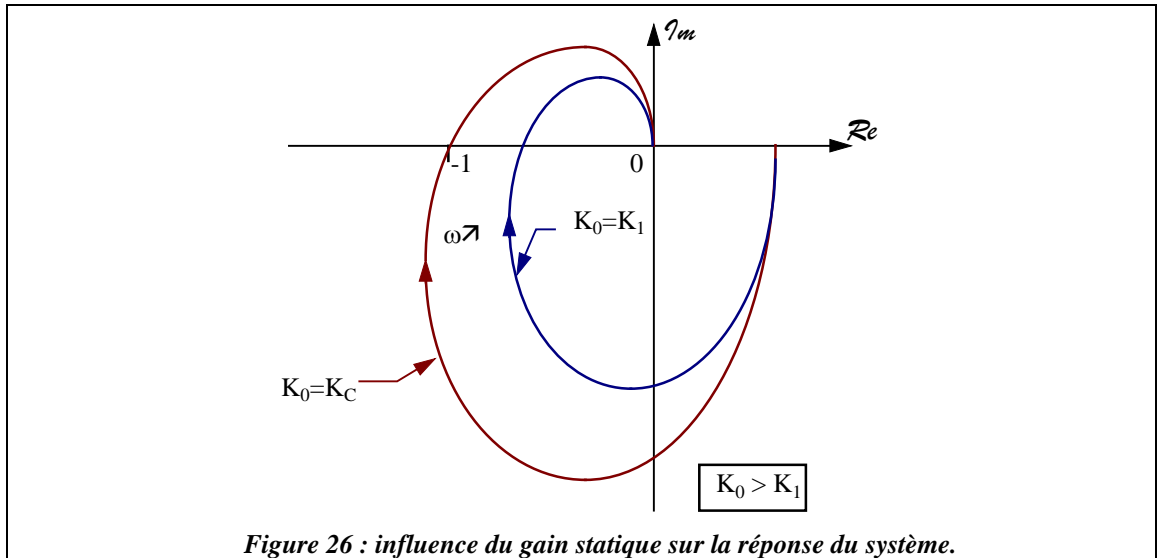


Figure 26 : influence du gain statique sur la réponse du système.

L'erreur statique est  $\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + K_0}$ . On peut diminuer cette erreur en augmentant le gain statique  $K_0$ .

Mais à partir de  $K_0 > K_c$  (gain critique) le système devient instable.

Une autre solution consiste à augmenter la classe du système, permettant de supprimer l'erreur de position. On effectue ceci en multipliant la fonction de transfert en boucle ouverte par  $\frac{1}{p}$ , c'est à dire en insérant une intégration. Mais l'utilisation d'un intégrateur pur est inconcevable.

La diminution de l'erreur de réponse d'un système asservi par augmentation du gain statique  $K_0$ , se fait au détriment de sa stabilité.

#### 2. Réponse à l'échelon en fonction de la marge de phase $\varphi_M$

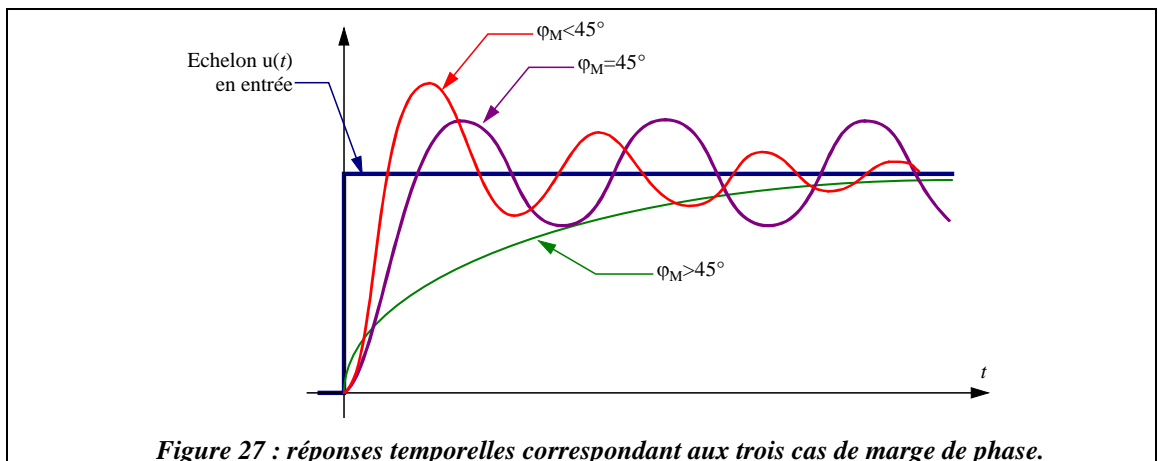


Figure 27 : réponses temporelles correspondant aux trois cas de marge de phase.

Les graphes de la Figure 27 représentent la réponse d'un système asservi à l'échelon pour différentes valeurs de la marge de phase  $\varphi_M$ .

$\varphi_M < 45^\circ$  le système est oscillant.

$\varphi_M > 45^\circ$  le temps de réponse est élevé.

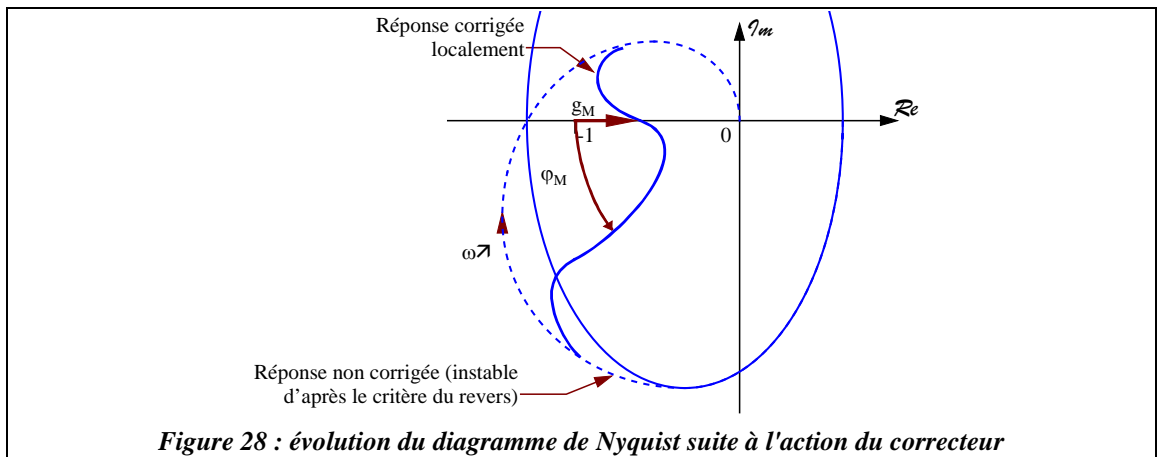
$\varphi_M = 45^\circ$  est le meilleur compromis rapidité stabilité.

Le meilleur compromis de réponse rapidité stabilité d'un système asservi est obtenu lorsque sa marge de phase  $\varphi_M$  est égale à  $45^\circ$

## Les correcteurs

### 1. Rôle des correcteurs

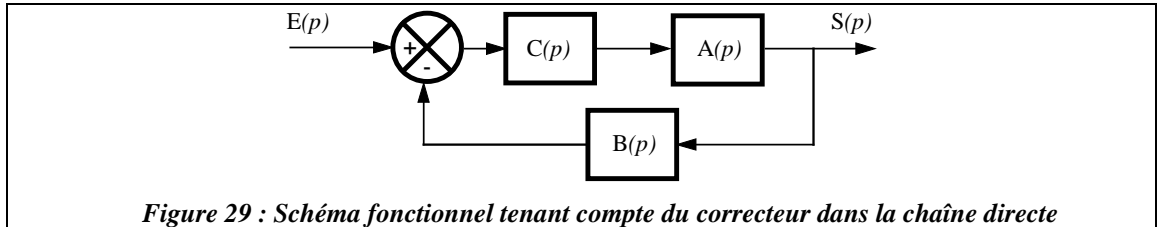
Le but d'un correcteur est de modifier l'allure de lieu de la fonction de transfert d'un système afin d'adapter localement la marge de gain et/ou la marge de phase (Cf. **Figure 28**).



### 2. Localisation et mode d'action du correcteur

L'étude de la stabilité d'un système est effectuée sur la fonction  $A(p).B(p)$ . La correction s'opère donc en modifiant cette fonction pour rendre le système stable et obtenir un diagramme de Nyquist corrigé conforme à celui de la Figure 28.

Il existe deux positions possibles pour le correcteur : dans chaîne directe ou dans la chaîne de retour. La plupart du temps, c'est la première solution qui est retenue car on traite directement l'erreur  $\varepsilon$  (pour pouvoir bénéficier des résultats relatifs à la fonction de transfert de l'erreur du §VI.2.1, « Transmittance de l'erreur », page 13). Le schéma fonctionnel est représenté à la Figure 29.



### 3. Différents types de correcteurs

| Nom du correcteur                                  | Expression de sa fonction de transfert                                |
|--|---|
| Correcteur proportionnel (P)                       | $P(p) = K_P$  |
| Correcteur proportionnel et intégral (PI)          | $PI(p) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$                |
| Correcteur proportionnel, intégral et dérivé (PID) | $PID(p) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$ |

**Tableau 8 : correcteurs usuels**

Ce document a été réalisé par Benoît Evrard, Hubert Huyon et Yvan Crévits. **Maquette/Mise en page** : Yvan Crévits.

**Illustrations** : Hubert Huyon et Yvan Crévits. **Relecture et participation** : Etudiants de 1ère année de BTS Electrotechnique promotion 1992.

**Pour tous contacts, renseignements et suggestions** écrire à la section de BTS Electrotechnique - Lycée du Hainaut - 1, avenue Villars - BP 475 - 59300 Valenciennes.

Ce texte contient 13220 signes et 2871 mots. Créé le 29 avril 1992. Révision du 9 mai 2025.