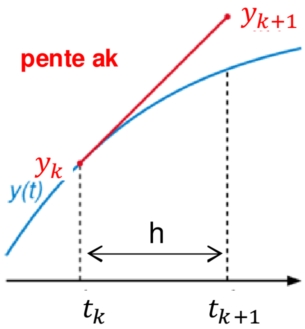
td	Résolution numérique d'équation différentielle : méthode d'Euler	TSI2

1 Présentation de la méthode d'Euler

L'idée la plus simple pour résoudre de manière approchée une équation différentielle ordinaire est de discrétiser le temps avec un pas h et d'approximer la dérivée temporelle sur chaque intervalle de longueur h.



1) Donner l'expression du taux d'accroissement (avance) noté ak de la tangente à y(t) à l'instant t_k, en fonction de y_k, y_{k+1}, t_k et t_{k+1}.

2) Soit $h = t_{k+1} - t_k$. Représenter sur le schéma ci-dessus, l'erreur entre y_{k+1} obtenu par la tangente et celui de la courbe réelle. Comment devient cet écart lorsque h diminue ?

3) En supposant h très petit, quelle relation obtient-on entre la dérivée temporelle notée dy(t) de la fonction y(t) et le taux d'accroissement ak. Exprimer alors dy.

4) En déduire l'équation de récurrence (caractéristique de la méthode d'Euler explicite) qui donne y_{n+1}.

2 Application à une équation différentielle d'ordre 1

On souhaite déterminer numériquement, la liste des points représentatifs de la fonction y(t) solution de l'équation différentielle donnée ci-dessous :

$$\boldsymbol{3y'(t) + 2y(t) - 6 = 0 \qquad avec\ y(0) = 1}$$

5) Définir la fonction dy qui admet en argument l'instant **t** et la valeur **y** de la fonction et qui renvoie la valeur de la dérivée exprimée à partir de l'équation différentielle à cet instant.

6) Ecrire la fonction **euler()** qui

- renvoie la liste des instants **T** (valeurs de temps) et la liste **Y** des valeurs prises par la fonction y(t) à chaque instant.
- qui admet en arguments :
  a : début de l'intervalle de temps
  b : fin de l'intervalle de temps
  N : nombre de partitions
  y0 : condition initiale y(a) à t=a

7) Déterminer les instructions permettant d'obtenir les solutions T1 et Y1 de l'équation différentielle puis de tracer la fonction y(t) solution de l'équation différentielle (on utilisera la fonction **plt.plot(x,y)** qui permet de tracer y(x) après l'import de la bibliothèque par **import matplotlib.pyplot as plt**), pour les valeurs suivantes :

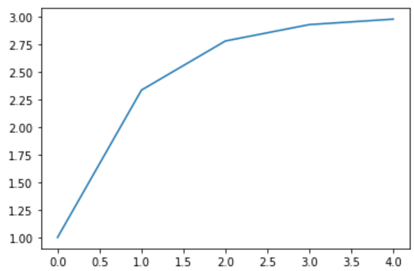
a = 0
b = 4
N = 4

8) Compléter le tableau ci-dessous traduisant l'algorithme d'Euler pour les valeurs suivantes :

a = 0
b = 4
N = 4

Itération	k	T[k]	Y[k]	dy(T[k], Y[k])

9) Vérifier si cela est compatible avec le tracé effectif suivant. Y a-t-il un risque d'erreur numérique important ?



3 Equation différentielle d'ordre 2 (CCS 2015)

Soient y une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et t_{min} et t_{max} deux réels tels que $t_{min}<t_{max}$. .
On note I l'intervalle $[t_{min}, t_{max}]$.
On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\forall t \in I \qquad y''(t) = f\big(y(t)\big) \qquad (III.1)$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\mathbb{R}$.

De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type.
On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{min})$ et $z0 = y'(t_{min})$. On suppose également que le système physique étudié est conservatif. Ce qui entraine l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement, …), notée E, qui vérifie l'équation (III.2) où $g' = -f$.

$$\forall t \in I \qquad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g\big(y(t)\big) = E \qquad (III.2)$$

3.1 Mise en forme du problème

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (III.1), on introduit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I, z(t) = E2'(t)$.

10) Montrer que l'équation (III.1) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en $z(t)$ et $y(t)$, noté (S).

11) Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [0, n-1]$. On pose $h = \frac{t_{max}-t_{min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{min} + ih$. Montrer que, pour tout entier $i \in [0, n - 2]$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)dt \qquad \text{et} \qquad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))dt \qquad \text{(III.3)}$$

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente des méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

3.2 Schéma d'Euler explicite

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

12) Dans ce schéma, montrer que les équations (III.3) permettent de définir deux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(z_i)_{i\in J_n}$ où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $y(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0.

13) Écrire une fonction **euler** qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(z_i)_{i\in J_n}$. Vous justifierez le choix des paramètres transmis à la fonction.

3.3 Schéma de Verlet

Le physicien français Loup Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (III.1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$, les relations de récurrence s'écrivent

$$y_{i+1} = y_i + hz_i + \frac{h^2}{2} f_i \quad \text{et} \quad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \qquad \text{(III.4)}$$

14) Écrire une fonction **verlet** qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(z_i)_{i\in J_n}$.